Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Till Mossakowski

Magdeburg, 16. Februar 2017

Grundlagen der Theoretischen Informatik I

Klausur – Aufgaben

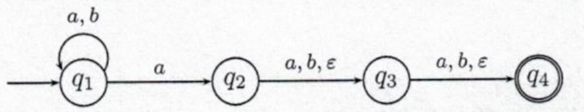
Aufgabe 1 [6 Punkte]
Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie deterministische endliche Automaten für folgende Sprachen an.

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau zwei } a\text{'s}\}$,
$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aa\}$.

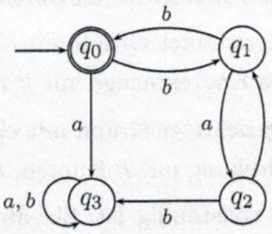
Aufgabe 2 [6 Punkte]
Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die Sprachen L_1 und L_2 mit

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und enthält eine gerade Anzahl } b\text{'s}\}$,
$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält sowohl das Teilwort } bc \text{ als auch das Teilwort } bb\}$.

Aufgabe 3 [8 Punkte]
Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus dem Beweis der Äquivalenz von NEA und DEA zu dem nichtdeterministischen endlichen Automaten, der durch den folgenden Zustandsgraphen gegeben ist, einen äquivalenten deterministischen Automaten. Sie brauchen dabei nicht alle Zustände, die sich aus der Potenzmengenkonstruktion ergeben, zu konstruieren, sondern nur die vom Startzustand aus erreichbaren.



Aufgabe 4 [12 Punkte]
Es sei M der durch das folgende Zustandsdiagramm gegebene deterministische endliche Automat.



(a) Geben Sie für das Wort *baab* die Berechnung von M an. Gehört *baab* zur akzeptierten Sprache $\mathcal{L}(M)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es seien R_i, $0 \leq i \leq 3$, die zu den Zuständen von M assoziierten regulären Ausdrücke, so wie in dem in der Vorlesung verwendeten Algorithmus zur Konstruktion eines äquivalenten regulären Ausdrucks zu einem gegebenem deterministischen endlichen Automaten verwendet.
Geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, ob folgende Aussagen korrekt sind oder nicht.

(1) $R_3 \equiv \emptyset$	(2) $R_2 \equiv ab$
(3) $R_1 \equiv (aa)^* b R_0$	(4) $R_0 \equiv (baab)^*$

(c) Bestimmen Sie entsprechend des Algorithmus aus der Vorlesung einen zu M äquivalenten regulären Ausdruck.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 [8 Punkte]
Es sei die Sprache $L = \{a^k b^\ell \in \{a,b\}^* \mid \ell \geq 0,\ \ell \leq k \leq 2\ell\}$ gegeben.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L regulär ist.
(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L kontextfrei ist.

Aufgabe 6 [4 Punkte]
Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen ist.

Aufgabe 7 [4 Punkte]
Wie lautet der Satz von Rice?

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\{\langle M\rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet $\{0,1\}\}$
(b) $\{\langle M\rangle \mid M$ ist eine Turing-Maschine und $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}((0 \cup 1)^*)\}$

Aufgabe 9 [6 Punkte]
Wir betrachten folgendes Problem.

Es seien Turing-Maschinen M_1 und M_2 gegeben.
Gibt es eine Eingabe, bei der beide Turing-Maschinen halten?

Formulieren Sie das Problem als Sprache und beweisen Sie, dass die Sprache nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 10 [10 Punkte]
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *unabhängig*, wenn keine Kante zwischen zwei Knoten aus V' existiert. Eine Knotenmenge $V'' \subseteq V$ bildet eine *Knotenüberdeckung*, wenn jede Kante in E mindestens einen Knoten aus V'' enthält.

Wir definieren die Mengen INDEPENDENT-SET und VERTEX-COVER durch

$$\begin{aligned} \text{INDEPENDENT-SET} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\ &\qquad\qquad \text{unabhängigen Knotenmenge mit } k \text{ Knoten, } k \in \mathbb{N}\}, \\ \text{VERTEX-COVER} &:= \{(G,k) \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\ &\qquad\qquad \text{Knotenüberdeckung mit } k \text{ Knoten, } k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Sprache VERTEX-COVER $\mathbb{NP}$-vollständig ist. Sie dürfen dabei benutzen, dass die Sprache INDEPENDENT-SET $\mathbb{NP}$-vollständig ist.

Aufgabe 11 [9 Punkte]
Geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch.

Es gibt für jede richtige Antwort 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort 0,5 Punkte Abzug, in summa aber keine negativen Punkte.

(a) Es gibt einen nichtdeterministischen endlichen Automaten, für den es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten mit weniger Zuständen gibt.
(b) Der Schnitt einer regulären Sprache und einer kontextfreien Sprache ist regulär.
(c) Für jede Grammatik gibt es eine äquivalente kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform.
(d) Für die kontextfreie Sprache $\{a^k b^\ell a^k b^m a^n \in \{a,b\}^* \mid k, \ell, m, n \geq 1\}$ gibt es einen Kellerautomaten mit höchstens zwei Zuständen, der sie akzeptiert.
(e) Es gibt Sprachen, die weder entscheidbar noch unentscheidbar sind.
(f) Es sei L eine $\mathbb{NP}$-vollständige Sprache. Dann gilt $\mathbb{P} = \mathbb{NP}$ genau dann, wenn $L \in \mathbb{NP}$.