

Grundlagen der Theoretischen Informatik II

Klausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [5 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_{\text{visit}} = \{(M, w, z) \mid \text{Die Turing-Maschine } M \text{ besucht bei Eingabe } w \text{ den Zustand } z\}$$

unentscheidbar ist. Sie dürfen dabei benutzen, dass das Halteproblem für Turing-Maschinen

$$H = \{(M, w) \mid \text{Die Turing-Maschine } M \text{ stoppt bei Abarbeitung der Eingabe } w\}$$

unentscheidbar ist.

Aufgabe 2 [9 Punkte]

- (a) Man zeige: Für $n \geq 0$ sind die Funktionen $Z^n: \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$Z^n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

primitiv-rekursiv. Sie dürfen dabei aus Vorlesung und Übung nur die Definition der primitiv rekursiven Funktion benutzen.

- (b) Es sei $g: \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=0}^{x_{k+1}} g(x_1, \dots, x_k, i)$$

ebenfalls primitiv-rekursiv ist. Sie dürfen dabei aus Vorlesung und Übung neben der Definition der primitiv rekursiven Funktion benutzen, dass die Funktion $\text{add}: \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\text{add}(x, y) = x + y$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Es seien a und b zwei verschiedene Buchstaben. Wir definieren eine Familie $\mathcal{L}$ von Sprachen durch

$$\mathcal{L} = \{L \mid \text{Falls } w \in L, \text{ dann gilt } |w|_a = |w|_b\}.$$

Man zeige, dass $\mathcal{L}$ keine AFL ist. Dabei bedeutet $|w|_x$ die Anzahl der Buchstaben x im Wort w .

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Für eine Sprache L über dem Alphabet V mit $a \in V$ sei

$$L_a = \{w \mid aw \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass für reguläres L auch L_a regulär ist.

Aufgabe 5 [7 Punkte]

Es seien eine Sprache L und ein nichtlöschender Homomorphismus h gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils:

- (a) Falls L regulär ist, so ist auch $h(L)$ regulär.
- (b) Falls $h(L)$ regulär ist, so ist auch L regulär.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Es sei $R = \{ab, ba\}^*$. Entscheiden Sie, ob folgende Wortpaare zur gleichen Äquivalenzklasse von $\sim_R$ gehören oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) λ und aba ,
- (b) a und bab ,
- (c) λ und ab .

Aufgabe 7 [10 Punkte]

Gegeben sei der deterministische endliche Automat $A = (\{a, b\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}, z_0, \{z_2, z_3, z_4\}, \delta)$ mit der folgenden Überföhrungsfunktion δ :

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	z_1	z_0	z_4	z_4	z_4	z_5
b	z_2	z_3	z_5	z_5	z_5	z_5

- (a) Konstruieren Sie gemäß dem in der Vorlesung behandelten Algorithmus den zu A äquivalenten minimalen deterministischen endlichen Automaten.
- (b) Geben Sie reguläre Ausdröcke für die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $\sim_R$ für $R = T(A)$ an.

Aufgabe 8 [5 Punkte]

- (a) Wann heißt eine kontextfreie Grammatik mehrdeutig?
- (b) Ist die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aA \mid a \mid \lambda, B \rightarrow aB \mid aC, C \rightarrow bC \mid b\}$$
 mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9 [5 Punkte]

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, S\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit folgenden Regeln in P :

$$\begin{array}{ll}
 S \rightarrow AB, & C \rightarrow AC \mid Bc \mid A, \\
 A \rightarrow CaC \mid a \mid b, & D \rightarrow dBCd. \\
 B \rightarrow Bb \mid CACB \mid bDb, &
 \end{array}$$

Bestimmen Sie gemäß einem der in der Vorlesung oder in der Übung behandelten Algorithmen, ob $L(G) = \emptyset$ gilt oder nicht. Erläutern Sie kurz Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 10 [6 Punkte]

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr und welche falsch? (Jeweils ohne Begründung.)

- (a) Für $w \in \{0, 1\}^*$ sei $K(w)$ die Kolmogorov-Komplexität von w . Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $w \in \{0, 1\}^*$ mit $|w| \geq n$ gilt: $K(w) \leq 2 \cdot |w|$
- (b) Das folgende Problem ist entscheidbar:
 Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 .
 Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- (c) Für jede Registermaschine M gilt: Es gibt ein zu M äquivalentes Loop/While-Programm mit nur einer While-Schleife.
- (d) Für alle nicht-kontextfreien Sprachen M und N gilt $(M^* \cdot N^*)^* = (M \cup N)^*$.