Klausur

1. August 2007, 8:15 - 10:15 Uhr

Name: ....

Matrikelnummer: ....

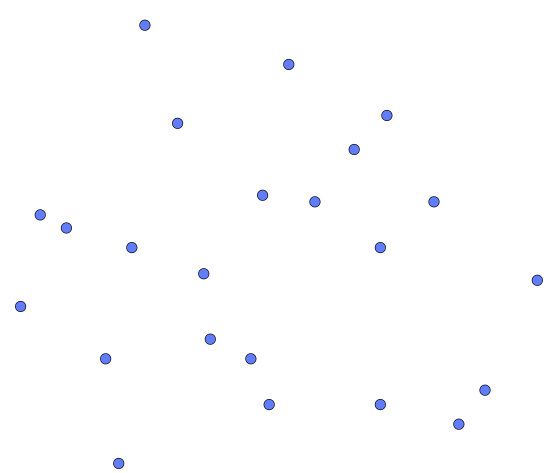
Anzahl beschriebener Blätter
(ohne Aufgabenblatt): ....

Bitte beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Name und Matrikelnummer!

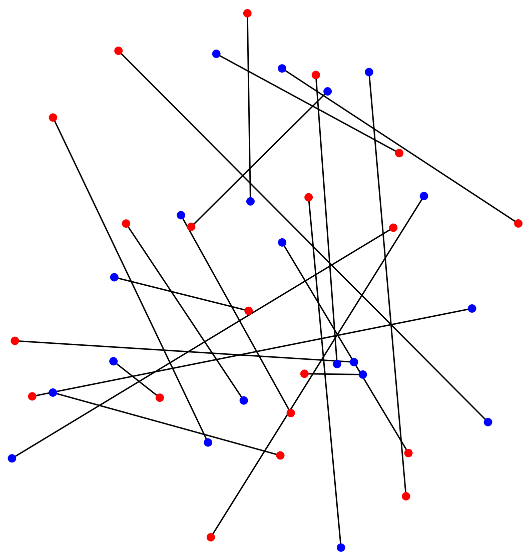
Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 6
Gesamtpunktzahl: 51

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1: (9 Punkte)
Gegeben sei eine Menge P von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Ein Punkt q liegt *nordöstlich* von einem Punkt p, falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Die Punkte in P seien bereits xy-lexikographisch aufsteigend sortiert in einem Array $A[1 \ldots n]$ gegeben.
Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n)$ alle Punkte in P bestimmt, für die es höchstens einen anderen Punkt in P gibt, der nordöstlich des Punktes liegt. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Falls es ihnen nicht gelingen sollte, einen $O(n)$ Algorithmus für vorsortierte Punktmengen zu finden, so geben Sie einen $O(n \log n)$ Algorithmus an und weisen die geforderte Laufzeit nach. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.

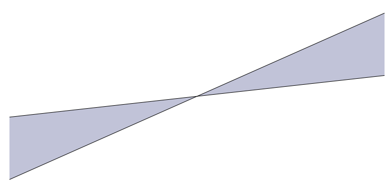


Aufgabe 2: (12 Punkte)
Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind. Sie brauchen also keine Schnittpunkte zu berechnen!
Sie dürfen annehmen, dass sich die Strecken in „allgemeiner Lage“ befinden, d.h., alle Streckenendpunkte haben paarweise verschiedene x-Koordinaten. Insbesondere gibt es also keine vertikalen Strecken. Begründen Sie die Laufzeit und die Korrektheit ihres Algorithmus.



Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei L eine Menge von n Geraden in der Ebene und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden. Ferner sei ℓ eine weitere Gerade. Die Geraden in $L \cup \{\ell\}$ seien in allgemeiner Lage. Wie kann man in Zeit $O(n)$ eine Kante in $\mathcal{A}(L)$ finden, die von ℓ geschnitten wird?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt p schneiden. Durch Rotation um p kann die eine Gerade in die andere überführt werden. Die bei einer solchen Rotation überstrichenen Geraden bilden einen Doppelkegel. Sei K der Doppelkegel, der die vertikale Gerade durch p nicht enthält.

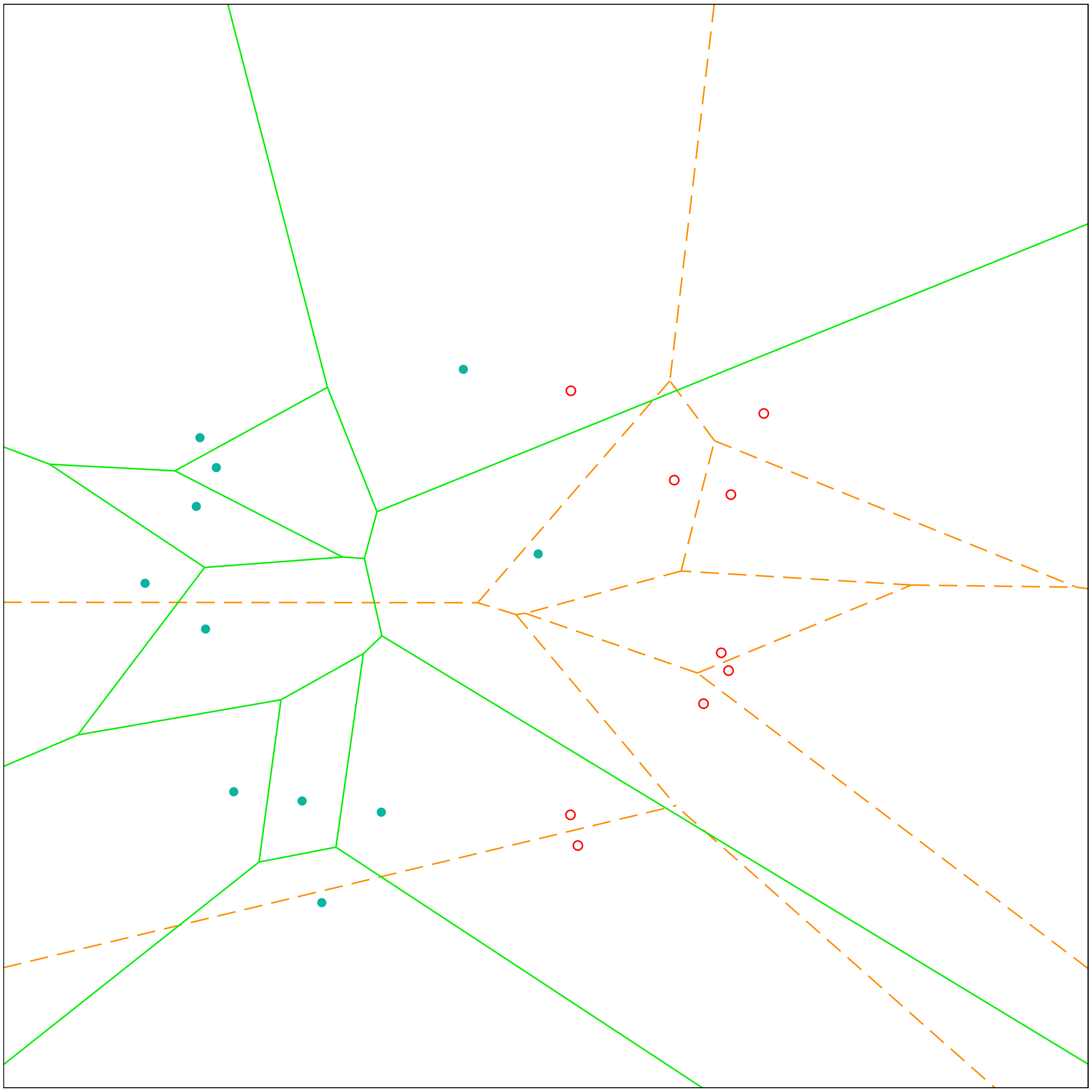


Sei $\mathcal{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathcal{D}(p) : Y = -p_x \cdot X + p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathcal{D}(\ell) = (a, b) \end{aligned}$$

Sei nun L_K die Menge aller Geraden durch p, die in K enthalten sind. Was ist $\mathcal{D}(L_K)$?

Aufgabe 5: (6 Punkte)
In der folgenden Abbildung sind die Teile der Voronoidiagramme einer Punktmenge L und einer Punktmenge R (gestrichelt) innerhalb eines Quadrates dargestellt. Die Punkte in L liegen links der Vertikalen, die das Quadrat halbiert, die Punkte R rechts davon. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Bisektors $\mathcal{B}(L, R)$!



Aufgabe 6: (16 Punkte)
Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., es gibt keine 3 Punkte aus S, die auf der gleichen Geraden liegen.

(a) Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der eine Triangulation $T(S)$ von S in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nichts zu sagen.

(b) Sei k die Anzahl der Extrempunkte in S, also die Anzahl der Eckpunkte von $CH(S)$. Aus wie vielen Kanten besteht $T(S)$? (allgemeine Lage, ohne Beweis).

(c) Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden. Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift für eine Menge P von n Punkten an, so dass es in jeder Triangulation von P einen Punkt vom Grad $n-1$ gibt. Die Punktmenge P sollte keine drei Punkte enthalten, die auf einer Geraden liegen.