Prof. Dr. Volker Kaibel
Dr. Dirk Oliver Theis
Otto-von-Guericke U MD
Wintersemester 2009/10

Klausur zur Vorlesung
Kombinatorische Optimierung

Aufgabe 1. Organisierte Kriminalität (25 Punkte)

Es sei C eine endliche Menge von Carabinieri und M eine endliche Menge von Mafiosi. Einige Mafiosi haben einige Carabinieri bestochen: Die Relation $K \subseteq C \times M$ gibt an, ob ein Carabiniero $c \in C$ von einem Mafioso $m \in M$ bestochen worden ist, d.h. $(c, m) \in K$ genau dann, wenn m c bestochen hat.
Durch jüngste Ermittlungserfolge ist dem Innenminister die Relation K bekannt. Um das im Kampf gegen die Mafia zu nutzen, will er jedem Mafioso m einen Carabiniero $c(m)$ zuordnen, der nicht von m bestochen wurde. Da ein Carabiniero mit einem Mafioso völlig beschäftigt ist, müssen die $c(m)$ Carabinieri paarweise verschieden sein.
Zeigen Sie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut-Theorems, dass die Mafiosi nur dann eine Chance haben, den Plan des Innenministers zu vereiteln, wenn für eine Menge N von Mafiosi und eine Menge B von Carabinieri mit $|B|+|N| > |C|$ jeder Mafioso in N jeden Carabiniero in B bestochen hat.

Aufgabe 2. Optimalität von Zirkulationen (20 Punkte)

Gegeben sei ein Digraph G mit Bögenkapazitäten w und -Kosten c. Gesucht ist ein Optimalitätszertifikat mit linearem Platzbedarf für das Min-Cost Circulation Problem, das man in linearer Zeit verifizieren kann. Definieren Sie ein solches Zertifikat und beschreiben Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von G, w, c, einer Zirkulation f und einem Exemplar ihres Zertifikats in linearer Zeit entscheidet, ob das Zertifikat die Optimalität von f beweist, oder nicht.

Aufgabe 3. Maximum Stable Set Problem (20 Punkte)

Sei G ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Das *Maximum Stable Set Problem* besteht darin, eine stabile Menge (d.h. Menge von paarweise nicht-benachbarten Knoten) maximaler Kardinalität zu finden.
Für einen Graphen H mit Kantenmenge E' bezeichen $L(H)$ den Graphen mit Knotenmenge E' und Kantenmenge

$$\{\{e, f\} \mid e \neq f \;\&\; e \cap f \neq \emptyset\},$$

das bedeutet, zwei Knoten von $L(H)$ sind benachbart, wenn die entsprechenden Kanten in H aneinanderstoßen.
Geben Sie einen Algorithmus an, der das Maximum Stable Set Problem in polynomieller Zeit löst, wenn ihm als Eingabe neben G ein Graph H mit $G = L(H)$ zur Verfügung steht.

Aufgabe 4. Matroide (20 Punkte)

(a) Sei G ein zusammenhängender Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Beweisen Sie, dass die Menge aller Kantenmengen $F \subseteq E$ mit der Eigenschaft, dass $G \setminus F$ zusammenhängend ist, ein Matroid bilden.

Hinweis: Für das Ergänzungsaxiom mit $A, B \subseteq E$ nehmen Sie an, dass für jedes $b \in B$ das Entfernen von $A \cup \{b\}$ den Graphen unzusammenhängend macht und betrachten Sie $G \setminus A$ genau. Betrachten Sie dann $G \setminus B$.

(b) Sei M ein Matroid auf einer Grundmenge E. Die inklusionsminimalen abhängigen Teilmengen von E heißen *Circuits*. Mit anderen Worten: eine Teilmenge $C \subseteq E$ ist genau dann ein Circuit, wenn sie abhängig ist (d.h. nicht unabhängig) aber für alle $e \in C$ die Menge $C \setminus \{e\}$ unabhängig ist.

Zeigen Sie, dass das folgende Optimierungsproblem NP-schwer ist.

> **Eingabe:** Matroid M auf Grundmenge E; Gewichte $c\colon E \to \mathbb{N}_0$
> **Ausgabe:** Maximaler Circuit, d.h., Circuit $C \subseteq E$, mit $\sum_{e \in C} c_e$ maximal.

Das Matroid sei implizit gegeben durch seine Rangfunktion, d.h. wir gehen davon aus, dass einem Algorithus zur Lösung des Optimierungsproblem eine Unterroutine zur Verfügung steht, die für gegebenes $F \subseteq E$ feststellt, ob sie unabhängig ist oder nicht, und das in einer Laufzeit verrichtet, die polynomiell ist in $|E|$.

Aufgabe 5. Perfektes Matching-Polytop (15 Punkte)

Es sei $P \subset \mathbb{R}^{15}$ die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von perfekten Matchings im vollständigen Graphen mit Knotenmenge $\{1, \ldots, 6\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $(1/5, \ldots, 1/5)^T \in \mathbb{R}^{15}$ in P liegt.

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt

$$\tfrac{1}{10}\chi(E(\{1,2,3\} : \{4,5,6\})) + \tfrac{7}{20}\chi(E(\{1,2,3\})) + \tfrac{7}{20}\chi(E(\{4,5,6\}))$$

nicht in P liegt.

- **Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.**
- **Schreiben Sie oben auf jedes Blatt Aufgabennummer, Namen und Matrikelnummer.**
- **In ihren Algorithmen können Sie die in der Vorlesung behandelten Algorithmen als Unterroutinen verwenden, ohne sie nochmal aufzuschreiben.**