Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Till Mossakowski

Magdeburg, 17. Februar 2014

Logik

Klausur – Aufgaben

Allgemeine Konventionen:

- a, b, ... sind Individuenkonstanten,
- x, y, ... sind Variablen,
- P, Q, ... sind Prädikat-Symbole,
- f, g, ... sind Funktions-Symbole,
- A, B, ... sind atomare aussagenlogische Sätze.
- Hinzu kommen die Prädikat-Symbole aus Tarski's world: Cube, Small etc.,
- Bei Fitch-Beweisen dürfen die „con-Regeln" nicht verwendet werden.

Aufgabe 1 [2 Punkte]
Untersuchen Sie, ob folgende Formel eine Tautologie ist oder nicht:

$$(\neg A \to A) \to A$$

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Bestimmen Sie ein äquivalente Formel in konjunktiver Normalform:

$$(A \leftrightarrow B) \to (A \to C)$$

Aufgabe 3 [8 Punkte]
Entscheiden Sie für jedes der folgenden Argumente, ob es gültig ist oder nicht:

(a)
$$\begin{array}{|l} \mathsf{Small(e)} \to \mathsf{Small(b)} \\ \mathsf{Small(c)} \to (\mathsf{Small(d)} \lor \mathsf{Small(e)}) \\ \mathsf{Small(d)} \to \neg\mathsf{Small(c)} \\ \hline \mathsf{Small(c)} \to \mathsf{Small(b)} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{|l} \mathsf{Cube(a)} \lor \mathsf{Small(a)} \\ \mathsf{Cube(a)} \to \mathsf{Tet(b)} \\ \neg\mathsf{Tet(b)} \to \mathsf{Small(a)} \\ \hline \mathsf{Tet(b)} \end{array}$$

Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an (Hinweis: Sie werden nur die aussagenlogischen Regeln brauchen). Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World" an (zur Notation einer solchen Klötzchenwelt siehe Aufgabe 7; die Anzahl der Schachbrettfelder können Sie selbst auswählen).

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils die Vorkommen von freien Variablen an.

(a) $\forall x(P(x) \to P(y))$
(b) $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x, a, y))$
(c) $\forall x P(x) \to P(x)$

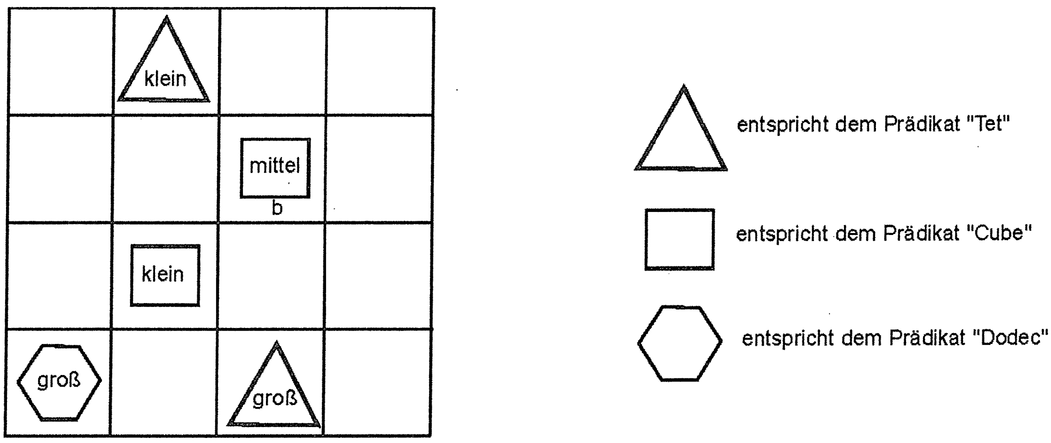
Aufgabe 5 [6 Punkte]
Welche der folgenden Wörter sind wohlgeformte Formeln? Falls es sich um eine wohlgeformte Formel handelt, geben Sie die Stelligkeit der Prädikatsymbole an. Falls es sich um keine wohlgeformte Formel handelt, geben Sie an, warum nicht.

(a) $\exists x P(x) \rightarrow Q(\forall y R(y))$
(b) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow R(y))$
(c) $\exists x P(P(x))$
(d) $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y)$

Aufgabe 6 [6 Punkte]
Formalisieren Sie folgende Sätze in PL1:

(a) Jeder kleine Würfel befindet sich links von einem großen Tetraeder.
(b) Es gibt einen großen Tetraeder, der rechts von jedem Würfel liegt.
(c) Nichts ist hinter einem Würfel.

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Betrachten Sie folgende Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World“:



Entscheiden Sie, welche der folgenden Formeln in dieser Welt erfüllt sind und welche nicht:

(a) $\forall x (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow x = b)$
(b) $\forall x (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \exists y (\mathrm{Cube}(y) \wedge (\mathrm{FrontOf}(x, y) \vee \mathrm{BackOf}(x, y))))$
(c) $\forall x \forall y \forall z (\mathrm{Between}(x, y, z) \rightarrow \exists u (\mathrm{FrontOf}(x, u) \wedge \forall v (\mathrm{FrontOf}(v, u) \rightarrow v = x)))$

Aufgabe 8 [8 Punkte]
Entscheiden Sie für jedes der folgenden Argumente, ob es gültig ist oder nicht:

(a)
$$\begin{array}{|l} \forall x [\mathrm{Cube}(x) \vee (\mathrm{Tet}(x) \wedge \mathrm{Small}(x))] \\ \exists x [\neg \mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(c, x)] \\ \hline \exists x [\mathrm{FrontOf}(c, x) \wedge \mathrm{Cube}(x)] \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{|l} \forall x [\mathrm{Cube}(x) \vee \mathrm{Tet}(x)] \\ \hline \forall x \mathrm{Cube}(x) \vee \forall x \mathrm{Tet}(x) \end{array}$$

Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an. Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt an.

Aufgabe 9 [4 Punkte]
Bringen Sie folgende Formel in pränexe Form:

$$\forall x[\exists y \mathsf{LeftOf}(x, b) \rightarrow \mathsf{FrontOf}(x, y)]$$

Aufgabe 10 [6 Punkte]
Geben Sie zu jedem der folgenden Formeln an, ob es sich um eine Hornformel handelt oder nicht. Falls es sich um eine Hornformel handelt, entscheiden Sie mit dem Algorithmus von Horn, ob sie erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die erfüllende Belegung an:

(a) $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee B) \wedge D \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C) \wedge E$
(b) $(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee B) \wedge D \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C) \wedge E$
(c) $(\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee B) \wedge D \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C) \wedge E$

Aufgabe 11 [5 Punkte]
Entscheiden Sie mittels aussagenlogischer Resolution für folgendes Argument, ob es gültig ist oder nicht:

$A \vee (B \wedge C)$
$\neg E$
$(A \vee B) \rightarrow (D \vee E)$
$\neg A$

$C \wedge D$

Aufgabe 12 [8 Punkte]
Wir betrachten die PL1-Sprache mit dem zweistelligen Prädikatsymbol P und der Individuenkonstanten a.

Sei $\mathfrak{M}$ die PL1-Struktur mit Individuenbereich $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Extension von P enthalte genau die Paare (m, n) für die gilt: m ist durch n ohne Rest teilbar. Die Interpretation der Individuenkonstante a sei die Zahl 3.

Sei g die Variablenbelegung, die x den Wert 1 zuweist.

Bestimmen Sie, ob g folgende Formeln in $\mathfrak{M}$ erfüllt (Notation: $\mathfrak{M} \models P[g]$, wobei P die jeweilige Formel ist):

(a) $\mathsf{P}(a, x)$
(b) $\forall y \mathsf{P}(y, x)$
(c) $\exists x \neg \mathsf{P}(x, x)$
(d) $\forall x \forall y (\mathsf{P}(x, y) \vee \mathsf{P}(y, x))$

Aufgabe 13 [4 Punkte]
Wir betrachten die PL1-Sprache aus Aufgabe 12. Geben Sie für die Formel

$$\exists x \neg \mathsf{P}(x, x)$$

eine PL1-Struktur an, die diese Formel erfüllt, und eine, die sie nicht erfüllt.

Aussagenlogische Regeln

Konjunktions-Einführung
(∧ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & P_1 \\ & \Downarrow \\ & P_n \\ & \vdots \\ \triangleright & P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \end{array}$$

Konjunktions-Beseitigung
(∧ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\ & \vdots \\ \triangleright & P_i \end{array}$$

Negations-Einführung
(¬ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} \\ \triangleright & \neg P \end{array}$$

Negations-Beseitigung
(¬ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & \neg\neg P \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

Disjunktions-Einführung
(∨ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & P_i \\ & \vdots \\ \triangleright & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n \end{array}$$

Disjunktions-Beseitigung
(∨ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & P_1 \vee \ldots \vee P_n \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} P_1 \\ \hline \vdots \\ S \end{array} \\ & \Downarrow \\ & \begin{array}{|l} P_n \\ \hline \vdots \\ S \end{array} \\ & \vdots \\ \triangleright & S \end{array}$$

⊥-Einführung
(⊥ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & P \\ & \vdots \\ & \neg P \\ & \vdots \\ \triangleright & \bot \end{array}$$

⊥-Beseitigung
(⊥ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & \bot \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

Reiteration
(Reit)

$$\begin{array}{r|l} & P \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

Konditional-Einführung
(→ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \triangleright & P \rightarrow Q \end{array}$$

Konditional-Beseitigung
(→ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & P \rightarrow Q \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & Q \end{array}$$

Bikonditional-Einführung
(↔ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ & \begin{array}{|l} Q \\ \hline \vdots \\ P \end{array} \\ \triangleright & P \leftrightarrow Q \end{array}$$

Bikonditional-Beseitigung
(↔ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & P \leftrightarrow Q \text{ (oder } Q \leftrightarrow P\text{)} \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & Q \end{array}$$

Prädikatenlogische Regeln

Existenzquantor-Einführung
(∃ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & S(c) \\ & \vdots \\ \triangleright & \exists x S(x) \end{array}$$

Existenzquantor-Beseitigung
(∃ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & \exists x S(x) \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} \boxed{c}\ S(c) \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \triangleright & Q \end{array}$$

c kommt dabei nicht außerhalb des Unterbeweises vor, in dem es eingeführt wurde.

Genereller konditionaler Beweis
(∀ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} \boxed{c}\ P(c) \\ \hline \vdots \\ Q(c) \end{array} \\ \triangleright & \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \end{array}$$

Allquantor-Beseitigung
(∀ Elim)

$$\begin{array}{r|l} & \forall x S(x) \\ & \vdots \\ \triangleright & S(c) \end{array}$$

Allquantor-Einführung
(∀ Intro)

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} \boxed{c} \\ \hline \vdots \\ P(c) \end{array} \\ \triangleright & \forall x P(x) \end{array}$$

c kommt dabei nicht außerhalb des Unterbeweises vor, in dem es eingeführt wurde.

Identitäts-Einführung
(= Intro)

$$\begin{array}{r|l} \triangleright & n = n \end{array}$$

Identitäts-Beseitigung
(= Elim)

$$\begin{array}{r|l} & P(n) \\ & \vdots \\ & n = m \\ & \vdots \\ \triangleright & P(m) \end{array}$$