Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg
31. Januar 2008

Logik

Prüfungsklausur - Aufgaben

Aufgabe 1 [3 Punkte]
Zeigen Sie durch vollständige Induktion über k, dass es zu jeder Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ einen aussagenlogischen Ausdruck der Länge k gibt.

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Man untersuche ob der Ausdruck
$A = -\big((\neg p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (q \wedge \neg r) \vee p\big)$
eine Kontradiktion ist oder nicht.

Aufgabe 3 [5 Punkte]
a) Geben Sie die Definition einer Booleschen Funktion an.
b) Geben Sie alle einstelligen Booleschen Funktionen an.

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Bestimmen Sie für folgende Ausdrücke jeweils äquivalente Ausdrücke in disjunkter Normalform und in konjunktiver Normalform.
a) $A_1 = (p \vee \neg q)$
b) $A_2 = \big(((p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)) \vee p\big)$

Aufgabe 5 [6 Punkte]
Man entscheide mit der aussagenlogischen Resolventenmethode ob der Ausdruck
$A = \big((p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg p\big)$
erfüllbar oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 6 [6 Punkte]
Wenden Sie (wenn möglich) den Hornformelalgorithmus auf die folgenden Ausdrücke an. Geben Sie das Zwischenergebnis nach jedem Schleifendurchlauf an. Gegebenfalls ist eine erfüllende Bedingung anzugeben.
a) $A_1 = \big((p \vee \neg u \vee \neg s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg u \vee s) \wedge u\big)$
b) $A_2 = \big((\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge q \wedge p\big)$

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe an:
a) Signatur einer prädikatenlogischen Sprache
b) prädikatenlogischer Term

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Legen Sie jeweils fest, ob x, y, f, g bzw. h Konstante, Variablen, Funktionssymbole (Stelligkeit?) oder Relationssymbole (Stelligkeit?) sein muss, damit die folgenden Wörter Terme bzw. prädikatenlogische Ausdrücke sind bzw. begründen Sie, dass die Wörter weder Term noch Ausdruck werden können.
a) x
b) $f\big(g(x), h(y)\big)$
c) $\exists x f\big(g(x), \forall g h(y)\big)$
d) $\Big(\exists x f\big(g(x, y)\big) \to \forall g h(y)\Big)$

Aufgabe 9 [8 Punkte]
Gegeben sie eine Signatur S durch

$K = \{k\},\ F_1 = \{f\},\ F_2 = \{h\},\ R_3 = \{r\}$ und
$F_3 = F_4 = \cdots = R_1 = R_2 = R_4 = \cdots = \emptyset$

und eine Interpolation $I = (U, r)$ mit

$U = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2, \dots\}$
$\tau(k) = 0,\ \tau(f)(x) = x + 2,\ \tau(h)(x, y) = x + y$ und $\tau(r) = \{(x, y, z) | x + y = z\}$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = 3, \alpha(y) = 4$ und $\alpha(x) = 2$.

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Terme bzw. Ausdrücke bezüglich I und α.
a) $f(k)$
b) $r\Big(x, f(y), f\big(h(x, y)\big)\Big)$
c) $\forall x r(x, k, x)$
d) $\forall x \forall y r\Big(x, f(y), f\big(h(x, y)\big)\Big)$

Aufgabe 10 [4 Punkte]
Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche unentscheidbar (ohne Begründung)?
a) Gegeben sei ein aussagenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?
b) Gegeben sei ein prädikatenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?
c) Gegeben sei ein Ausdruck der temporalen Logik. Ist er erfüllbar?
d) Gegeben sei ein Ausdruck der dreiwertigen Logik. Ist er erfüllbar?

Aufgabe 11 [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck über die pränexe Normalform in die bereinigte Skolemform
$\big(\exists x \forall y r_1\big(x, g(y)\big) \vee \neg \forall x r_2(x, u)\big)$

Aufgabe 12 [6 Punkte]
Berechnen Sie mit der Antwortprädikatmethode der prädikatenlogischen Resolution$5 + 2$. Gehen Sie dabei von folgenden Klauseln aus.
$K_1 = \{add(x, 0, x)\}$ und $K_2 = \big\{\neg add(x, y, z), add\big(x, s(y), s(z)\big)\big\}$

Aufgabe 13 [6 Punkte]
Bestimmen Sie für die Zeitlinie $(M, x) = (s_1, s_2, s_3, s_1, s_2, s_3, \dots)$ mit

$L(s_1) = \{p\},\quad L(s_2) = \{p, r\},\quad L(s_3) = \{q, r\}$

die Werte der Ausdrücke

$Fp,\quad pUp,\quad qUp\ \ und\ \ GF(p \vee q)$