Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 13. Februar 2009

Logik

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [3 Punkte]
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über den Aufbau, dass jeder aussagenlogische Ausdruck auf eine schließende Klammer oder eine Variable endet.

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Man untersuche, ob der Ausdruck

$$A = ((\neg q \wedge (r \rightarrow s)) \vee (r \wedge \neg s) \vee q)$$

eine Tautologie ist oder nicht.

Aufgabe 3 [3 Punkte]

(a) Geben Sie die Definition des Begriffs „n-stellige Boolesche Funktion" an.

(b) Geben Sie alle einstelligen Booleschen Funktionen an.

(c) Wie viele dreistellige Boolesche Funktionen gibt es?

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Bestimmen Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke sowohl einen semantisch äquivalenten Ausdruck in disjunktiver Normalform als auch einen semantisch äquivalenten Ausdruck in konjunktiver Normalform.

(a) $A_1 = (p \vee \neg q)$

(b) $A_2 = (((p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)) \vee p)$

Aufgabe 5 [6 Punkte]
Man entscheide mit der aussagenlogischen Resolutionsmethode, ob der Ausdruck

$$A = ((r \vee t) \wedge (\neg s \vee \neg t) \wedge (r \vee s \vee \neg t) \wedge \neg r)$$

erfüllbar oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 6 [8 Punkte]
Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob es sich um einen Hornausdruck handelt oder nicht. Entscheiden Sie gegebenenfalls mittels des Algorithmus von Horn, ob der jeweilige Ausdruck erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die ermittelte erfüllende Belegung an.

(a) $A_1 = ((p \vee \neg u \vee \neg s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg u \vee s) \wedge u)$

(b) $A_2 = ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge q \wedge p)$

(c) $A_3 = ((p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge t \wedge (q \vee \neg t))$

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Gegeben sei eine Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{a\}$, $F_3 = \{f\}$, $R_2 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset$ sonst.

(a) Man gebe vier Terme über der Signatur $\mathcal{S}$ und der Variablenmenge $var = \{x\}$ an.

(b) Man gebe alle prädikatenlogischen Ausdrücke über der Signatur $\mathcal{S}$ und der Variablenmenge $var = \{x\}$ an, deren Länge höchstens 8 ist.

(c) Man gebe einen Basisausdruck über der Signatur $\mathcal{S}$ und der Variablenmenge $var = \{x\}$ an, dessen Länge größer als acht ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Legen Sie für jeden der Buchstaben x, y, f, g, h in den folgenden Wörtern jeweils fest, ob er Konstantensymbol, Variable, Funktionssymbol (welcher Stelligkeit) oder Relationssymbol (welcher Stelligkeit) sein muss, damit das entsprechende Wort

i) ein Term,
ii) ein prädikatenlogischer Ausdruck

ist. Falls das jeweilige Wort kein Term oder kein Ausdruck werden kann, ist dies zu begründen.

(a) x
(b) $f(g(x), h(y))$
(c) $\exists x f(g(x), \forall y h(y))$

Aufgabe 9 [6 Punkte]
Gegeben seien eine Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{k\}$, $F_1 = \{f\}$, $F_2 = \{h\}$, $R_3 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset$ sonst, eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$$U = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\},$$
$$\tau(k) = 0, \quad \tau(f)(x) = x + 2, \quad \tau(h)(x, y) = x + y \quad \text{und} \quad \tau(r) = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = 3$, $\alpha(y) = 4$ und $\alpha(z) = 2$.
Bestimmen Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich I und α:

(a) $f(k)$
(b) $r(x, f(y), f(h(x, y)))$
(c) $\forall x\, r(x, k, x)$

Aufgabe 10 [4 Punkte]
Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche unentscheidbar (ohne Begründung)?

(a) Gegeben sei ein aussagenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?
(b) Gegeben sei ein prädikatenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?
(c) Gegeben sei ein Ausdruck der temporalen Logik. Ist er erfüllbar?
(d) Gegeben sei ein Ausdruck der dreiwertigen Logik. Ist er erfüllbar?

Aufgabe 11 [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck über eine pränexe Normalform in eine bereinigte Skolemform:

$$(\exists z \forall y\, r_1(z, g(y))) \vee \neg \forall z\, r_2(z, u)).$$

Aufgabe 12 [6 Punkte]
Berechnen Sie mit der Antwortprädikatmethode der prädikatenlogischen Resolution $4 + 2$. Verwenden Sie dabei folgende Klauseln:

$$K_1 = \{\mathrm{add}(x, 0, x)\} \quad \text{und} \quad K_2 = \{\neg\mathrm{add}(x, y, z), \mathrm{add}(x, s(y), s(z))\}.$$

Aufgabe 13 [6 Punkte]
Bestimmen Sie für die Zeitlinie (M, x) die Werte der Ausdrücke

$$q, \quad Fq, \quad p\,U\,q \quad \text{und} \quad G^{\infty} r.$$

Dabei ist $M = (S, L)$ mit $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ und $L(s_1) = \{p\}$, $L(s_2) = \{p, r\}$, $L(s_3) = \{q, r\}$ sowie für $i \geq 0$

$$x(i) = \begin{cases} s_1, & \text{falls } i = 3k \text{ für ein } k \geq 0 \text{ ist,} \\ s_2, & \text{falls } i = 3k + 1 \text{ für ein } k \geq 0 \text{ ist,} \\ s_3, & \text{falls } i = 3k + 2 \text{ für ein } k \geq 0 \text{ ist.} \end{cases}$$