

Logik Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über den Aufbau (struktureller Induktion), dass für jeden aussagenlogischen Ausdruck A die Gleichheit $\#_{var}(A) = \#_{\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}}(A) + 1$ gilt.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Vereinfachen Sie folgende aussagenlogische Ausdrücke durch äquivalentes Umformen.

$$A_1 = ((p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_1)) \wedge (p_1 \vee \neg p_1))$$
$$A_2 = (\neg p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow \neg p_2))$$

Aufgabe 3 [4 Punkte]

a) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck A derart, dass sowohl A als auch $\neg A$ erfüllbar sind?

Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.

b) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck A derart, dass sowohl A als auch $\neg A$ unerfüllbar sind?

Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.

Aufgabe 4 [7 Punkte]

Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob es sich um einen Hornausdruck handelt oder nicht. Entscheiden Sie gegebenenfalls mittels des Algorithmus von Horn, ob der jeweilige Ausdruck erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die ermittelte erfüllende Belegung an.

$$A_1 = (p_4 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_4)) \wedge \neg p_3 \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_2 \vee p_1) \wedge p_2$$
$$A_2 = ((p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$
$$A_3 = ((\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$
$$A_4 = ((\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \wedge p_1$$

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Legen Sie jeweils für jedes der Wörter

$$w_1 = f(g(x), h(y)),$$
$$w_2 = \exists f h(g(x), f)$$
$$w_3 = \exists y f(g(x) \rightarrow \forall y h(y)) \text{ sowie}$$
$$w_4 = (\exists x x(g(z, y)) \rightarrow \forall y h(y))$$

fest, ob f, g, h, x, y und z Konstante, Variable, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein müssen, damit es

a) ein Term ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein Term werden kann,

b) ein prädikatenlogischer Ausdruck ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein prädikatenlogischer Ausdruck werden kann.

Aufgabe 6 [4 Punkte]

Beschreiben Sie formal auf zwei verschiedene Arten den arithmetischen Term $2 * x + y$. Geben Sie jeweils Signatur und Interpretation an.

Aufgabe 7 [7 Punkte]

Gegeben seien eine Signatur S durch $K = \{k\}$, $F_1 = \{f\}$, $F_2 = \{h\}$, $R_2 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset$ sonst, eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$U = \{a, b, c\}^*$ (U ist also die Menge der Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$),

$\tau(k) = abc$, $\tau(f)(x) = ax$, $\tau(h)(x, y) = bxxxy$ und $\tau(r) = \{(x, y) \mid ax = y\}$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = ac$, $\alpha(y) = c$ und $\alpha(z) = cc$.

Geben Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich I und α an.

- $f(k)$
- $h(f(x), x)$
- $r(f(x), y)$
- $\exists z r(f(k), z)$
- $\forall z r(z, y)$

Aufgabe 8 [6 Punkte]

Man überführe den folgenden Ausdruck in eine bereinigte Skolemform.

$$\left(\forall u \exists y (r_1(x, g(y), u) \vee \neg \exists x r_2(x)) \wedge \neg \exists x \forall z \neg r_3(f(x, z), y) \right)$$

Aufgabe 9 [8 Punkte]

Anna, Ben und Chris sind musikalische Geschwister und spielen Instrumente. Anna spielt alles, was Chris spielt. Ben spielt Gitarre. Chris spielt mindestens ein Instrument, aber nicht Gitarre. Wer Flöte spielt, spielt auch noch ein weiteres Instrument. Wer Gitarre spielt, spielt kein Klavier. Ermitteln Sie durch Resolvieren, ob Anna Klavier spielt.

Aufgabe 10 [2 Punkte]

Geben Sie eine zweistellige Funktion $f: \{0, \times, 1\}^2 \rightarrow \{0, \times, 1\}$ durch eine Werttabelle an, die nicht durch einen Ausdruck der dreiwertigen Logik induziert wird.

Aufgabe 11 [4 Punkte]

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen in der dreiwertigen Logik wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

- Der Ausdruck $(p \rightarrow q)$ ist semantsiuch äquivalent zum Ausdruck $(\neg p \vee q)$.
- Der Ausdruck $(p \leftrightarrow \neg \neg p)$ ist eine Tautologie.

Ausdruck 12 [6 Punkte]

Berechnen Sie für das Kripke-Modell (S, K, R) mit

$S = \{r, s, t, u\}$, $K = \{r, s\}$, $K(y) = \{s, t, r\}$,

$R(a) = \{(t, s), (s, r)\}$, $R(b) = \{(s, u), (s, s), (s, t)\}$

die Menge $K(\{(a; b)(x \wedge y)\})$ und $R(\{\{(x \wedge y)?; a; b\}\})$.