Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 21. Februar 2011

Logik

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [4 Punkte]
Es sei A ein aussagenlogischer Ausdruck und A' entstehe aus A durch Streichen aller in A vorkommenden Zeichen $\neg$. Zeigen Sie durch vollständige Induktionm über den Aufbau von A (also durch strukturelle Induktion), dass auch A' ein aussagenlogischer Ausdruck ist.

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Man untersuche ob der Ausdruck

$$A = \Big(\neg\big((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3\big) \vee (p_1 \rightarrow p_2)\Big)$$

eine Tautologie ist oder nicht.

Aufgabe 3 [4 Punkte]
a) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck A derart, dass sowohl A als auch $\neg A$ Tautologien sind? Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.
b) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck A derart, dass sowohl A als auch $\neg A$ erfüllbar sind? Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.

Aufgabe 4 [4 Punkte]
Bestimmen Sie für folgende Ausdrücke jeweils äquivalente Ausdrücke in disjunktiver Normalform und in konjunktiver Normalform
a) $A_1 = (\neg p \wedge \neg q)$
b) $A_2 = \Big(\big((\neg r \vee p) \wedge (r \vee \neg q)\big) \vee p\Big)$

Aufgabe 5 [6 Punkte]
Bestimmen Sie $res^*(K_1)$ und $res^*(K_2)$ für

$$K_1 = \big\{\{p, \neg r\}, \{\neg q\}, \{q, r\}\big\}$$
$$K_2 = \big\{\{\neg p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{p, r\}\big\}$$

Was können Sie den Resultaten entnehmen?

Aufgabe 6 [5 Punkte]
Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob es sich um einen Hornausdruck handelt oder nicht. Entscheiden Sie gegebenfalls mittels des Algorithmus von Horn, ob der jeweilige Ausdruck erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die ermittelte erfüllende Belegung an.
a) $A_1 = \big((p \vee \neg u \vee \neg s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg u \vee s) \wedge u\big)$
b) $A_2 = \big((\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge q \wedge p\big)$
c) $A_3 = \big((p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge t \wedge (q \vee \neg t)\big)$

Aufgabe 7 [4 Punkte]
Geben Sie die Definition des Begriffs des prädikatenlogischen Terms an.

Aufgabe 8 [6 Punkte]
Legen Sie jeweils für jedes der Wörter

$w_1 = f\big(f(x), h(y)\big),$
$w_2 = \exists f\ h(g(x), f)$
$w_3 = \exists y\ f\big(g(x) \to \forall y\ h(y)\big)$ sowie
$w_4 = \Big(\exists x\ x\big(g(z,y)\big) \to \forall y\ h(y)\Big)$

fest, ob f, g, h, x, y und z Konstante, Variable, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein müssen, damit es
a) ein Term ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein Term werden kann,
b) ein prädikatenlogischer Ausdruck ist, oder begründen Sie, dass das Work kein prädikatenlogischer Ausdruck werden kann.

Aufgabe 9 [3 Punkte]
Man beweise, dass $\forall x \exists y\ r(x,y)$ keine Folgerung von $\exists x \forall y\ r(x,y)$ ist.

Aufgabe 10 [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck über eine pränexe Normalform in eine bereinigte Skolemform:

$$\Big(\exists z \forall y\ r_1\big(z, g(y)\big) \vee \neg \forall z\ r_2(z,u)\Big)$$

Aufgabe 11 [6 Punkte]
Gegeben seien eine Signatur S durch $K = \{k\},\ F_1 = \{f\},\ F_2 = \{h\},\ R_2 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset\ sonst$, eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$U = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$,
$\tau(k) = 0,\ \ \tau(f)(x) = x + 2,\ \ \tau(h)(x,y) = x + y$ und $\tau(r) = \{(x,y,z) | x + y = z\}$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = 3,\ \alpha(y) = 4$ und $\alpha(z) = 2$.
Geben Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich I und α an.
a) $f(k)$
b) $r\Big(x, f(y), f\big(h(x,y)\big)\Big)$
c) $\forall x\ r(x,k,x)$

Aufgabe 12 [8 Punkte]
Adelbert, Benjamin und Christopher interessieren sich für Wintersportarten. Benjamin interessiert sich für Langlauf. Christopher interessiert sich für mindestens eine Sportart, aber nicht für Langlauf. Adelbert interessiert sich für alles, wofür Christopher sich interessiert. Diejenigen, die sich für Bobsport interessieren, interessieren sich auch für eine weitere Sportart. Diejenigen, die sich für Langlauf interessieren, interessieren sich nicht für Biathlon.
Ermitteln Sie durch Resolvieren, ob Adelbert sich für Biathlon interessiert.

Aufgabe 13 [3 Punkte]
Offensichtlich induziert in der dreiwertigen Logik jeder aussagenlogische Ausdruck A mit n Varaiblen eine Funktion $f_A: \{0,1,\times\}^n \to \{0,1,\times\}$.
Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ eine Funktion $f: \{0,1,\times\}^n \to \{0,1,\times\}$ gibt, die nicht von einem Ausdruck induziert werden kann.

Ausdruck 14 [3 Punkte]
Berechnen Sie für das Kripke-Modell (S, K, R) mit

$$S = \{r,s,t,u\},\ \ K = \{r,s\},\ \ K(y) = \{s,t,r\},\ \ R(a) = \{(t,s),(t,t),(s,r)\}$$

die Menge $K\big((\{a;a\})(x \wedge y)\big)$.