Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 21. Juli 2010

Logik

Prüfungsklausur – Aufgaben

Aufgabe 1 [3 Punkte]
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über den Aufbau (struktureller Induktion), dass jeder aussagenlogische Ausdruck auf eine schließende Klammer oder eine Variable endet.

Aufgabe 2 [3 Punkte]
Man untersuche ob der Ausdruck

$$A = \Big(\big((q \wedge \neg r) \vee p\big) \vee \big(\neg p \wedge (q \rightarrow r)\big)\Big)$$

eine Tautologie ist oder nicht.

Aufgabe 3 [6 Punkte]
Bestimmen Sie für folgende Ausdrücke jeweils äquivalente Ausdrücke in disjunktiver Normalform und in konjunktiver Normalform

a) $A_1 = (p \vee \neg q)$

b) $A_2 = \Big(\big((p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)\big) \vee p\Big)$

Aufgabe 4 [6 Punkte]
Man entscheide mit der aussagenlogischen Resolutionsmethode, ob der Ausdruck

$$A = \big((\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge \neg p\big)$$

erfüllbar oder unerfüllbar ist.

Aufgabe 5 [6 Punkte]
Wenden Sie (wenn möglich) den Hornformelalgorithmus auf die folgenden Ausdrücke an. Geben Sie das Zwischenergebnis nach jedem Schleifendurchlauf an. Gegebenfalls ist eine erfüllende Belegung anzugeben.

a) $A_1 = \big((p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge q\big)$

b) $A_2 = (u \wedge (\neg p \vee u) \wedge (p \vee u) \wedge p)$

Aufgabe 6 [4 Punkte]
Es seien $S = (K, F_1, R_1, F_2, R_2, \ldots)$ eine Signatur und var eine Menge von Variablen. Geben Sie die Definition der Menge der Terme $T(S)$ über S an.

Aufgabe 7 [6 Punkte]
Legen Sie jeweils fest ob f, g, h, u, x, y und z Konstante, Variablen, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein muss, damit die folgenden Wörter Terme oder prädikatenlogische Ausdrücke sind, oder begründen Sie, dass die Wörter weder Term noch Ausdruck werden können.

a) x

b) $f\big(g(x), h(y)\big)$

c) $\exists x\, f\big(g(x), \forall y\, h(y)\big)$

d) $\Big(\exists x\, f\big(g(x,y)\big) \rightarrow \forall y\, h(y)\Big)$

Aufgabe 8 [8 Punkte]
Gegeben seien eine Signatur S durch

$K = \{k\},\ F_1 = \{f\},\ F_2 = \{h\},\ R_3 = \{r\}$ und
$F_3 = F_4 = \cdots = R_1 = R_2 = R_4 = \cdots = \emptyset$,

und eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$U = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$,
$\tau(k) = 0,\ \ \tau(f)(x) = x + 2,\ \ \tau(h)(x,y) = x + y$ und $\tau(r) = \{(x,y,z) | x + y = z\}$

sowie eine Belegung α mit $\alpha(x) = 3,\ \alpha(y) = 4$ und $\alpha(z) = 2$.
Geben Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich I und α an.
a) $f(k)$
b) $r\left(x, f(y), f\big(h(x,y)\big)\right)$
c) $\forall x\, r(x,k,x)$
d) $\forall x \forall y\, r\left(x, f(y), f\big(h(x,y)\big)\right)$

Aufgabe 9 [3 Punkte]
Geben Sie die Definition des Begriffs „lineare Resolution“ an.

Aufgabe 10 [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck in eine bereinigte Skolemform.

$$\Big(\forall u \exists y\, \big(r_1(x, g(y), u) \vee \neg\exists x\, r_2(x)\big) \wedge \neg\exists x \forall z\, \neg r_3(f(x,z), y)\Big)$$

Aufgabe 11 [6 Punkte]
Berechnen Sie mit der Antwortprädikatmethode der prädikatenlogischen Resolution $5 + 2$.
Verwenden Sie dabei folgende Klauseln:

$K_1 = \{add(x, 0, x)\}$ und $K_2 = \big\{\neg add(x,y,z), add\big(x, s(y), s(z)\big)\big\}$

Aufgabe 12 [2 Punkte]
Geben Sie eine zweistellige Funktion $f: \{0, \times, 1\}^2 \to \{0, \times, 1\}$ durch eine Werttabelle an, die nicht durch einen Ausdruck der dreiwertigen Logik induziert wird.

Ausdruck 13 [6 Punkte]
Berechnen Sie für das Kripke-Modell (S, K, R) mit

$S = \{r, s, t, u\},\ \ K = \{r, s\},\ \ K(y) = \{s, t, r\}$,
$R(a) = \{(t,s), (s,r)\}, \qquad R(b) = \{(s,u), (s,s), (s,t)\}$

die Menge $K\big((\{a; b\})(x \wedge y)\big)$ und $R\big(\{\{(x \wedge y)?\,; a\}; b\}\big)$.