Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Jürgen Dassow

Magdeburg, 1. März 2012

# Logik

Klausur – Aufgaben

**Aufgabe 1** [4 Punkte]
Geben Sie die Definition des Begriffs „aussagenlogischer Ausdruck“ an.

**Aufgabe 2** [3 Punkte]
Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $k$, dass es zu jeder Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ einen aussagenlogischen Ausdruck der Länge $k$ gibt.

**Aufgabe 3** [4 Punkte]
Vereinfachen Sie folgende aussagenlogische Ausdrücke durch äquivalentes Umformen.

$$A_1 = ((p_1 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)) \vee (p_2 \wedge (p_1 \wedge (p_1 \vee p_2)))),$$
$$A_2 = (\neg p_1 \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow \neg p_2)).$$

**Aufgabe 4** [4 Punkte]

(a) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck $A$ derart, dass sowohl $A$ als auch $\neg A$ Kontradiktionen sind? Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.

(b) Gibt es einen aussagenlogischen Ausdruck $A$ derart, dass sowohl $A$ als auch $\neg A$ erfüllbar sind? Falls ja, geben Sie einen an, falls nein, begründen Sie.

**Aufgabe 5** [6 Punkte]
Bestimmen Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke sowohl einen semantisch äquivalenten Ausdruck in disjunktiver Normalform als auch einen semantisch äquivalenten Ausdruck in konjunktiver Normalform.

(a) $A_1 = (p \vee \neg q)$,

(b) $A_2 = (((p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)) \vee p)$.

**Aufgabe 6** [6 Punkte]
Man beweise oder gebe ein Gegenbeispiel ($F$ und $G$ seien aussagenlogische Ausdrücke):

(a) Falls $(F \rightarrow G)$ Tautologie ist und $F$ erfüllbar ist, so ist $G$ erfüllbar.

(b) Falls $(F \rightarrow G)$ erfüllbar ist und $F$ erfüllbar ist, so ist $G$ erfüllbar.

**Aufgabe 7** [6 Punkte]
Man entscheide mit der aussagenlogischen Resolutionsmethode, ob der Ausdruck

$$A = ((p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_3 \vee \neg p_2) \wedge \neg p_1)$$

erfüllbar oder unerfüllbar ist.

**Aufgabe 8** [6 Punkte]
Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob es sich um einen Hornausdruck handelt oder nicht. Entscheiden Sie gegebenenfalls mittels des Algorithmus von Horn, ob der jeweilige Ausdruck erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die ermittelte erfüllende Belegung an.

(a) $A_1 = ((p \vee \neg u \vee \neg s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg u \vee s) \wedge u)$,

(b) $A_2 = ((p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge t \wedge (q \vee \neg t))$,

(c) $A_3 = ((\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee s) \wedge \neg t \wedge (\neg r \vee p) \wedge r \wedge q)$.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 9** [6 Punkte]
Legen Sie jeweils für jedes der Wörter

$$w_1 = f(g(x), h(y)),$$
$$w_2 = \exists f\, h(g(x), f),$$
$$w_3 = \exists y\, f(g(x) \rightarrow \forall y\, h(y)) \text{ sowie}$$
$$w_4 = (\exists x\, x(g(z, y)) \rightarrow \forall y\, h(y))$$

fest, ob $f$, $g$, $h$, $x$, $y$ und $z$ Konstante, Variable, Funktionssymbol (Stelligkeit?) oder Relationssymbol (Stelligkeit?) sein müssen, damit es

(a) ein Term ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein Term werden kann,

(b) ein prädikatenlogischer Ausdruck ist, oder begründen Sie, dass das Wort kein prädikatenlogischer Ausdruck werden kann.

**Aufgabe 10** [7 Punkte]
Gegeben seien eine Signatur $\mathcal{S}$ durch $K = \{k\}$, $F_1 = \{f\}$, $F_2 = \{h\}$, $R_3 = \{r\}$ und $F_i = R_i = \emptyset$ sonst, eine Interpretation $I = (U, \tau)$ mit

$$U = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\},$$
$$\tau(k) = 0, \quad \tau(f)(x) = 2 \cdot x, \quad \tau(h)(x, y) = 2 \cdot x + y \quad \text{und} \quad \tau(r) = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$$

sowie eine Belegung $\alpha$ mit $\alpha(x) = 3$, $\alpha(y) = 3$ und $\alpha(z) = 3$.

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Terme und Ausdrücke bezüglich $I$ und $\alpha$.

(a) $f(k)$,

(b) $r(x, f(y), h(x, y))$,

(c) $\forall x\, r(x, f(y), h(z, x))$,

(d) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, r(x, f(y), h(z, x))$.

**Aufgabe 11** [6 Punkte]
Man überführe den folgenden Ausdruck über eine pränexe Normalform in eine bereinigte Skolemform.

$$(\exists z \forall y\, r_1(z, g(y))) \vee \neg \forall z\, r_2(z, y)).$$

**Aufgabe 12** [6 Punkte]
Berechnen Sie mit der Antwortprädikatmethode der prädikatenlogischen Resolution $4 + 2$. Verwenden Sie dabei die Klauseln

$$K_1 = \{\mathrm{add}(x, 0, x)\} \quad \text{und} \quad K_2 = \{\neg \mathrm{add}(x, y, z), \mathrm{add}(x, s(y), s(z))\}.$$

**Aufgabe 13** [2 Punkte]
Geben Sie durch eine Wertetabelle eine Funktion $f : \{0, \times, 1\} \rightarrow \{0, \times, 1\}$ an, die nicht durch einen Ausdruck der dreiwertigen Logik induziert wird.

**Aufgabe 14** [3 Punkte]
Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche unentscheidbar (ohne Begründung)?

(a) Gegeben sei ein aussagenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?

(b) Gegeben sei ein prädikatenlogischer Ausdruck. Ist er erfüllbar?

(c) Gegeben sei ein Ausdruck der dynamischen Logik. Ist er erfüllbar?