Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Till Mossakowski

Magdeburg, 15. Februar 2016

Logik

Klausur – Aufgaben

Allgemeine Konventionen: Im Folgenden sind

- a, b, c, ... Individuenkonstanten,
- u, v, w, ... Variablen,
- A, B, C, ... atomare aussagenlogische Sätze,
- P, Q, R, ... Prädikatsymbole,
- Cube, Small, Larger, ... die Prädikatsymbole aus Tarski's world.

Aufgabe 1 [4 Punkte]
Betimmen Sie jeweils mittels Wahrheitstafeln, ob folgende Sätze Tautologien sind oder nicht.

$$S_1 = (\neg A \to A) \to A,$$
$$S_2 = ((B \land \neg C) \lor A) \lor (\neg A \land (B \to C)).$$

Aufgabe 2 [5 Punkte]
Bestimmen Sie für jede der folgenden Sätze durch äquivalentes Umformen jeweils eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform sowie eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform.

$$S_1 = (A_1 \to A_2) \land A_3,$$
$$S_2 = ((A_1 \land A_2) \lor (A_3 \to A_2)) \lor (A_1 \leftrightarrow A_3).$$

Aufgabe 3 [6 Punkte]
Geben Sie für jedes der folgenden Argumente an, ob es gültig ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an (ohne „con"-Regeln). Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World" an.

(a)

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Cube(a)} \lor \mathsf{Small(a)} \\
\mathsf{Cube(a)} \to \mathsf{Tet(b)} \\
\mathsf{Small(a)} \to \mathsf{Cube(b)} \\
\hline
\mathsf{Tet(b)} \lor \mathsf{Cube(b)}
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{|l}
\mathsf{Tet(b)} \leftrightarrow (\mathsf{Cube(a)} \leftrightarrow \mathsf{Cube(c)}) \\
\hline
\mathsf{Dodec(b)} \to \mathsf{a} \neq \mathsf{b}
\end{array}$$

Aufgabe 4 [5 Punkte]
Beweisen Sie, dass für alle aussagenlogische Sätze S und alle Bewertungsfuntionen h_1 und h_2 gilt: Falls h_1 und h_2 für alle atomaren Sätze in S übereinstimmen, so gilt $\hat{h}_1(S) = \hat{h}_2(S)$.

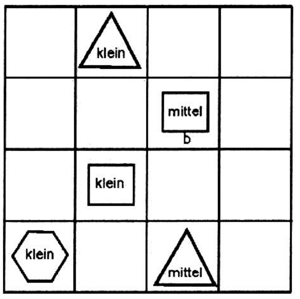
Aufgabe 5 [9 Punkte]
Geben Sie jeweils an, welche der folgenden Formeln wohlgeformte Formeln sind und welche nicht. Falls es sich um keine wohlgeformte Formel handelt, begründen Sie Ihre Antwort. Falls es sich um eine wohlgeformte Formel handelt, geben Sie die Stelligkeit der Prädikatsymbole sowie die freien Variablen an.

(a) $\forall x \exists x (P(x) \to P(y))$
(b) $\forall x (P(x) \to \exists y Q(x, a, y))$
(c) $\forall a\, P(a) \to P(x)$
(d) $\exists x\, P(x) \to Q(\forall y R(y))$
(e) $\exists x\, P(Q(x))$
(f) $\forall x \exists x (P(x) \land P(y)$

Aufgabe 6 [6 Punkte]
Formalisieren Sie folgende Sätze in PL1:

(a) Nur vor großen Objekten befindet sich nichts.
(b) Jedes Tetraeder befindet sich vor allen Dodekaedern.
(c) Kein Tetraeder ist genauso groß wie ein Würfel.

Aufgabe 7 [6 Punkte]



Gegeben ist nebenstehende Welt von „Tarski's World", bestehend aus zwei Tetraedern (einer klein, einer mittel), zwei Würfel (einer klein, einer mittel – b) sowie einem kleinen Dodekaeder. Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze in dieser Welt erfüllt sind und welche nicht, begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

(a) $\neg \exists x\,(\mathsf{Dodec}(x) \land \exists y\, \mathsf{BackOf}(y,x))$

(b) $\forall x\,((\mathsf{Dodec}(x) \land \exists y\,(\mathsf{Cube}(y) \land \mathsf{LeftOf}(x,y))) \rightarrow \mathsf{Large}(x))$

(c) $\forall x\,(\mathsf{Dodec}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathsf{Cube}(y) \land \mathsf{SameSize}(x,y)))$

Aufgabe 8 [8 Punkte]

Geben Sie für jedes der folgenden Argumente an, ob es gültig ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an (ohne „con"-Regeln). Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World" an.

(a)

$\forall x\,(\mathsf{Cube}(x) \lor (\mathsf{Tet}(x) \land \mathsf{Small}(x)))$
$\exists x\,(\neg\mathsf{Small}(x) \land \mathsf{FrontOf}(c,x))$

$\exists x\,(\mathsf{FrontOf}(c,x) \land \mathsf{Cube}(x))$

(b)

$\forall x\,(\mathsf{Cube}(x) \lor \mathsf{Tet}(x))$

$\forall x\,\mathsf{Cube}(x) \lor \forall x\,\mathsf{Tet}(x)$

Aufgabe 9 [6 Punkte]

Geben Sie zu jedem der folgenden Formeln an, ob es sich um eine Hornformel handelt oder nicht. Falls es sich um eine Hornformel handelt, entscheiden Sie mit dem Algorithmus von Horn, ob sie erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die erfüllende Belegung an:

(a) $(\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land E$

(b) $(\neg B \lor \neg C) \land (\neg D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land E$

(c) $(D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \land E$

Aufgabe 10 [5 Punkte]

Entscheiden Sie mittels aussagenlogischer Resolution für folgendes Argument, ob es gültig ist oder nicht. Beweisen Sie Ihre Entscheidung.

$\neg A \rightarrow B$
$C \rightarrow (D \lor E)$
$D \rightarrow \neg C$
$A \rightarrow \neg E$

$C \rightarrow B$

Aufgabe 11 [8 Punkte]

Wir betrachten die PL1-Sprache mit dem zweistelligen Prädikatsymbol Q und der Individuenkonstanten a. Sei $\mathfrak{M}$ die PL1-Struktur mit Individuenbereich $D = \{1,2,3,4,5,6\}$. Die Extension von Q enthalte genau die Paare (m,n) für die gilt: m ist durch n ohne Rest teilbar. Die Interpretation der Individuenkonstante a sei die Zahl 3. Sei g die Variablenbelegung, die x den Wert 1 zuweist. Bestimmen Sie, ob g folgende Formeln in $\mathfrak{M}$ erfüllt (Notation: $\mathfrak{M} \models P[g]$, wobei P die jeweilige Formel ist):

(a) $\mathsf{Q}(x,a)$

(b) $\forall y\,\mathsf{Q}(y,x)$

(c) $\exists x \neg\mathsf{Q}(x,x)$

(d) $\forall x \forall y\,(\mathsf{Q}(x,y) \lor \neg\mathsf{Q}(y,x))$

Aufgabe 12 [4 Punkte]

Wir betrachten die PL1-Sprache mit dem zweistelligen Prädikatsymbol Q und der Individuenkonstanten b. Geben Sie für die Formel

$$\forall x\,(\mathsf{Q}(x,b) \rightarrow \mathsf{Q}(b,x))$$

eine PL1-Struktur an, die diese Formel erfüllt, und eine, die sie nicht erfüllt, und begründen Sie Ihre Antworten.