Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Informatik

Prof. Dr. Till Mossakowski
Magdeburg, 27. Juli 2018

# Logik-Klausur – Aufgaben

**Allgemeine Konventionen:** Im Folgenden sind, solange nicht anders angegeben,

- a, b, c, d, e Individuenkonstanten,
- u, v, w, x, y, z Variablen,
- f, g, h, ... Funktionssymbole,
- A, B, C, ... atomare aussagenlogische Sätze,
- P, Q, R, U, V, W Prädikatsymbole,
- Cube, Small, Larger, ... die Prädikatsymbole aus Tarski's World.

**Aufgabe 1** [4 Punkte]

Wann ist ein aussagenlogischer Satz eine Tautologie? Bestimmen Sie jeweils mittels Wahrheitstafeln, ob folgende Sätze Tautologien sind oder nicht.

(a) $(\mathsf{A} \to \neg\mathsf{A}) \to \neg\mathsf{A}$ (b) $((\mathsf{B} \land \neg\mathsf{C}) \lor \mathsf{A}) \lor (\neg\mathsf{A} \land (\mathsf{B} \to \mathsf{C}))$

**Aufgabe 2** [4 Punkte]

Es sind folgende Definitionen aus der Vorlesung gegeben, aber unvollständig mit Lücken von #1 bis #8. Geben Sie in Ihrer Lösung die entsprechenden richtigen Termini (nummeriert von #1 bis #8) an.

(a) Eine Menge $\mathscr{I}$ von $\boxed{\#1}$ heißt genau dann wt-erfüllbar, wenn es eine $\boxed{\#2}$ h gibt, unter der $\boxed{\#3}$ Sätze in $\mathscr{I}$ $\boxed{\#4}$ sind.

(b) Ein $\boxed{\#5}$ ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn er eine $\boxed{\#6}$ aus einer oder mehreren $\boxed{\#7}$ von einem oder mehreren $\boxed{\#8}$ ist.

**Aufgabe 3** [6 Punkte]

Man überführe folgende Sätze durch eine Kette von Äquivalenzen Schritt für Schritt jeweils in einen äquivalenten Satz in Negations-Normalform, in einen äquivalenten Satz in konjunktiver Normalform sowie in einen äquivalenten Satz in disjunktiver Normalform.

(a) $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \land \mathsf{C}$ (b) $((\mathsf{A} \lor \mathsf{B}) \to \mathsf{C}) \to (\mathsf{A} \to \mathsf{B})$ (c) $(\neg\mathsf{A} \lor \mathsf{B})$

**Aufgabe 4** [4 Punkte]

Es seien die Wahrheitswertbelegung h durch $\mathsf{h}(\mathsf{A}) = W$, $\mathsf{h}(\mathsf{B}) = W$ und $\mathsf{h}(\mathsf{C}) = F$ sowie der aussagenlogische Satz $\mathsf{S} = ((\mathsf{A} \land \mathsf{B}) \to \neg(\mathsf{B} \land \mathsf{C}))$ gegeben. Bestimmen Sie nachvollziehbar (Schritt für Schritt, nur unter Benutzung der Definition) den Wahrheitswert $\hat{\mathsf{h}}(\mathsf{S})$.

**Aufgabe 5** [6 Punkte]

Geben Sie für jedes der folgenden Argumente an, ob es gültig ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an (ohne „con"-Regeln). Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World" an.

(a)

| Small(a) → Dodec(b)
| Dodec(a) ∨ Small(a)
| Dodec(a) → Tet(b)
|—
| Tet(b) ∨ Dodec(b)

(b)

| Cube(b) ↔ (Tet(a) ↔ Tet(c))
|—
| Dodec(b) → a ≠ b

**Aufgabe 6** [5 Punkte]

Geben Sie jeweils an, welche der folgenden Formeln wohlgeformte Formeln sind und welche nicht. Falls es sich um keine wohlgeformte Formel handelt, begründen Sie Ihre Antwort. Falls es sich um eine wohlgeformte Formel handelt, geben Sie die Stelligkeit der Prädikatsymbole sowie die freien Variablen an.

(a) $\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{x}\, (\mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \mathsf{P}(\mathsf{y}))$

(b) $(\forall \mathsf{x}\, \mathsf{P}(\mathsf{x}) \to \exists \mathsf{x}\, \mathsf{Q}(\mathsf{P}(\mathsf{x}), \mathsf{P}(\mathsf{x})))$

(c) $\forall \mathsf{a}\, \exists \mathsf{x}\, (\mathsf{P}(\mathsf{a}) \to \mathsf{P}(\mathsf{x}))$

(d) $\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \mathsf{Q}(\mathsf{x}, \mathsf{a}, \mathsf{y}))$

**Aufgabe 7** [8 Punkte]

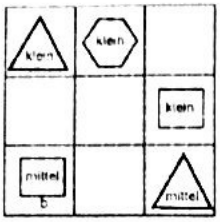
Formalisieren Sie folgende Sätze in PL1.

(a) Jedes Tetraeder befindet sich zwischen zwei Objekten.
(b) Kein Dodekaeder ist genauso groß wie ein Würfel.
(c) Nur vor kleinen Objekten befindet sich nichts.
(d) Jedes Objekt, hinter dem sich nichts befindet, ist ein Würfel.



**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8** [6 Punkte]




Gegeben ist nebenstehende Welt von „Tarski's World", bestehend aus zwei Tetraedern (einer klein, einer mittel), zwei Würfel (einer klein, einer mittel – b) sowie einem kleinen Dodekaeder. Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze in dieser Welt erfüllt sind und welche nicht. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.

(a) $\neg \exists x\, (\mathsf{Dodec}(x) \land \exists y\, \mathsf{BackOf}(x, y))$

(b) $\forall x\, (\mathsf{Cube}(x) \rightarrow \exists y\, \exists z\, \mathsf{Between}(x, y, z))$

(c) $\forall x\, (\mathsf{Cube}(x) \rightarrow \exists y\, (\mathsf{Dodec}(y) \land \mathsf{SameSize}(x, y)))$

**Aufgabe 9** [8 Punkte]

Geben Sie für jedes der folgenden Argumente an, ob es gültig ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn es gültig ist, geben Sie einen Beweis im Fitch-Kalkül an (ohne „con"-Regeln). Wenn es nicht gültig ist, geben Sie ein Gegenbeispiel in Form einer Klötzchenwelt im Stil von „Tarski's World" an.

(a)

$\forall x\, (\mathsf{Cube}(x) \lor (\mathsf{Tet}(x) \land \mathsf{Small}(x)))$
$\exists x\, (\neg \mathsf{Small}(x) \land \mathsf{FrontOf}(c, x))$

---

$\exists x\, (\mathsf{FrontOf}(c, x) \land \mathsf{Cube}(x))$

(b)

$\forall x\, (\mathsf{Cube}(x) \lor \mathsf{Tet}(x))$

---

$\forall x\, \mathsf{Cube}(x) \lor \forall x\, \mathsf{Tet}(x)$

**Aufgabe 10** [9 Punkte]

Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln an, ob es sich um eine Hornformel handelt oder nicht. Falls es sich um eine Hornformel handelt, entscheiden Sie nachvollziehbar mit einer der behandelten Varianten des Algorithmus von Horn, ob sie erfüllbar ist oder nicht, und geben Sie bei Erfüllbarkeit die so ermittelte erfüllende Belegung explizit an.

(a) $(\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land E$

(b) $(D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \land E$

(c) $(\neg B \lor \neg C) \land (\neg D \lor B) \land D \land (\neg D \lor \neg E \lor C) \land E$

(d) $(\neg B \lor \neg C) \land (\neg D \lor B) \land \neg D \land (\neg D \lor \neg E \lor C)$

**Aufgabe 11** [5 Punkte]

Entscheiden Sie mittels aussagenlogischer Resolution für folgendes Argument, ob es gültig ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$\neg A \lor B$
$C \lor \neg(A \land B)$

---

$\neg A \lor (B \land C)$

**Aufgabe 12** [7 Punkte]

Wir betrachten die PL1-Sprache mit dem zweistelligen Prädikatsymbol $\mathsf{R}$ und der Individuenkonstanten $\mathsf{a}$. Sei $\mathfrak{M}$ eine PL1-Struktur mit dem Individuenbereich $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Extension von $\mathsf{R}$ enthalte genau die Paare $(\mathsf{m}, \mathsf{n})$ für die gilt: $\mathsf{m}$ und $\mathsf{n}$ lassen bei der Division durch 2 den gleichen Rest. Die Interpretation der Individuenkonstantea sei die Zahl 2. Sei $\mathbf{g}$ die Variablenbelegung, die $\mathsf{x}$ den Wert 4 zuweist.

(a) Geben Sie die Menge $\mathfrak{M}(R)$ explizit als Aufzählung ihrer Elemente, also geordneter Paare, an.

(b) Bestimmen Sie nachvollziehbar Schritt für Schritt unter Benutzung der Definition, ob $\mathbf{g}$ folgende Formeln in $\mathfrak{M}$ erfüllt (Notation: $\mathfrak{M} \models \mathsf{P}_i[\mathsf{g}]$, wobei $\mathsf{P}_i$ die jeweilige Formel ist):

$\mathsf{P}_1 = \mathsf{R}(x, a)$ $\qquad$ $\mathsf{P}_2 = (\mathsf{R}(x, a) \lor \mathsf{R}(a, x))$ $\qquad$ $\mathsf{P}_3 = \exists x\, \neg \mathsf{R}(a, x)$

**Aufgabe 13** [6 Punkte]

Geben Sie jeweils (ohne Begründung) an, welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch.

Es gibt für jede richtige Antwort 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort 1 Punkt Abzug, in summa aber keine negativen Punkte.

(a) Es gibt eine einelementige Junktorenmenge, die wahrheitsfunktional vollständig ist.

(b) Die leere Menge ist eine Resolvente der Klauseln $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$

(c) Falls ein formales Beweissystem vollständig ist, ist es auch korrekt.

(d) Wenn eine Folgerung in Fitch mittels Taut Con beweisbar ist, so ist sie auch durch die Wahrheitstafelmethode beweisbar.