Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Willems, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik I (MP MaI)
oder
unbenoteter Leistungsnachweis (LN MaI)

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WS 2010/2011
14.02.2011

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matr.nr.	MP MaI/LN MaI

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
max. Punkte	6	7	9	9	10	9
Punkte						

Gesamtpunktzahl der Klausur = 50	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1. Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ und $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$.

   (a) Bestimmen Sie die Ordnung von A und von B.

   (b) Zeigen Sie: $B^{-1}AB = A^{-1}$.

2. Sei V ein K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Wir definieren für $v, w \in V$ die Relation $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in U$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V ist.

   (b) Was ist die Äquivalenzklasse vom Nullvektor?

3. Gegeben seien die Polynome $f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ und $g = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

   (a) Berechnen Sie den ggT von f und g.

   (b) Geben Sie die Bézout-Koeffizienten für f und g an.

4. Gegeben sei die lineare Abbildung $A \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 9 \\ \alpha \\ -16 \end{pmatrix} x_3,$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Schreiben Sie A als Matrix.

   (b) Für welche α ist A ein Isomorphismus?

   (c) Bestimmen Sie dim $Kern\, A$ für $\alpha = 20$.

5. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R})_3$.

   (a) Bestimmen Sie $\det A$ und $\det AA^t$.

   (b) Bestimmen Sie A^{-1}.

   (c) Geben Sie die Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ für das Gleichungssystem $Ax = b$ an, wobei

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

6. Sei K ein Körper. Für $A = (a_{ij}) \in (K)_n$ sei $Sp\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $Sp : (K)_n \to K$ ein Epimorphismus ist, d. h. eine K-lineare surjektive Abbildung.

   (b) Zeigen Sie: $Sp\, AB = Sp\, BA$ für alle $A, B \in (K)_n$.

   (c) Zeigen Sie: Sind $A, B \in (K)_n$ ähnlich, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $C \in (K)_n$ mit $C^{-1}\, A\, C = B$, so gilt $SpA = Sp\, B$.
   (Hilfe: Benutzen Sie (b))