Fakultät für Mathematik
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. H. Bräsel / Dr. M. Höding / Dipl.-Wirtsch.-Math. R. August /
M. Mörig / R. Buchholz

Übungsscheinklausur Mathematik I (Wiederholung)
Fachrichtungen: Informatik, Computervisualistik, Ingenieurinformatik
28. März 2006

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer

Punktebewertung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte	11	6	12	21	50
erreichte Punkte					

Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!

1. Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

   (a) Geben Sie die inversen Elemente zu $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, bezüglich der Addition und der Multiplikation im Körper der komplexen Zahlen an.

   (b) Bestimmen Sie $z \in \mathbb{C}$ aus der Gleichung: $\frac{2z^2}{2i+4} = \frac{i}{2+i}$.

2. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sei R eine binäre Relation über $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
$$(a_1, b_1)\, R\, (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 + 3b_2 = a_2 + 3b_1$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen zu $(1,0)$ und $(0,1)$ und veranschaulichen Sie diese.

   (c) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen allgemein.

4. Sei die Gruppe $G = (M, \star)$ mit $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ durch folgende Gruppentafel gegeben:

$\star$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	f	e	d	c
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	e	a	c	b
e	e	c	d	b	f	a
f	f	d	b	c	a	e

   (a) Bestimmen Sie für die Elemente e und f die Ordnung und das inverse Element. Ist die Gruppe kommutativ?

   (b) Geben Sie alle Untergruppen von G mit zwei Elementen an, achten Sie dabei auf eine sorgfältige Darstellung!

   (c) Zeigen Sie, daß die Untergruppe $G^* = (\{a, e, f\}, \star)$ Normalteiler in der Gruppe G ist.

   (d) Ist die Untergruppe G^* isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$, wobei $\mathbb{Z}_3$ die Menge aller Restklassen modulo 3 ist und $\oplus$ die gewöhnliche Addition von Restklassen bezeichnet?

   (e) Beschreiben Sie die Faktorgruppe G/G^*. Geben Sie den natürlichen Homomorphismus φ von G auf G/G^* an.