Modulprüfung Mathematik I für Informatiker

WS 2006/2007
31.01.2007

1. *Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Vergleiche 1.12; Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 \text{ und die rechte Seite ist } \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Also ist die Aussage für $n = 1$ richtig. Es folgt der Induktionsschritt von n nach $n+1$; zunächst ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 .$$

Auf die Summe auf der rechten Seite wenden wir nun die Induktionsvoraussetzung an und erhalten somit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4\,(n+1)(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2\left(n^2 + 4\,n + 4\right)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

2. *Für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ bestimme man alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [5]_3 \\ [-2]_3 & [1]_3 & [4]_3 \\ [3]_3 & [-1]_3 & [6]_3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [6]_3 \\ [5]_3 \\ [4]_3 \end{pmatrix}.$$

Vergleiche 4.14; Umformen auf Zeilenstufenform der erweiterten Matrix;

z.B.

$$\begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [5]_3 & [6]_3 \\ [-2]_3 & [1]_3 & [4]_3 & [5]_3 \\ [3]_3 & [-1]_3 & [6]_3 & [4]_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [5]_3 & [6]_3 \\ [0]_3 & [5]_3 & [14]_3 & [17]_3 \\ [0]_3 & [-7]_3 & [-9]_3 & [-14]_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [2]_3 & [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [0]_3 & [-2]_3 & [-1]_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [1]_3 & [1]_3 \\ [0]_3 & [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$$

Somit ist die einzige Lösung $([1]_3, [2]_3, [2]_3)^\mathsf{T}$.

3. *Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit*

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T}) = \begin{pmatrix} -2\,x_1 + x_2 + x_3 \\ 3\,x_1 - 3\,x_4 \\ -x_2 - x_3 + 2\,x_4 \end{pmatrix}.$$

i) *Man bestimme die Abbildungsmatrix von f.*

ii) *Man bestimme* $\mathrm{Kern}(f)$ *und* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f))$.

iii) *Man bestimme* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(f))$. *Ist f surjektiv?*

zu i): Die Abbildungsmatrix (vergleiche 6.5) ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

zu ii): (vergleiche 6.23) Lösen des homogenen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, also A auf Zeilenstufenform bringen, z.B.:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\mathrm{Kern}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f)) = 2$.

zu iii) Nach 6.20 ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(f)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(f)) = 2$, und da der Werteberecih von f (der $\mathbb{R}^3$) 3-dimensional ist, kann f nicht surjektiv sein.

4. *Sei U der 3-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

i) *Man bestimme eine Basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ von U.*

ii) *Man bestimme einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$, so dass $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ sind.*

iii) *Man bestimme zwei Vektoren der Länge 1 in U, die zueinander orthogonal sind.*

zu i) (vergleiche 5.9 und 5.36; in der Vorlesung ist auch eine Basis von solch einer Hyperebene angegeben worden). Wenn man nicht durch „hinschauen" drei Kandidaten für eine Basis findet, muss man Lösungsraum des Gleichungssystems $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ bestimmen. Sei

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese drei Vektoren liegen in U. Um zu zeigen, dass diese Vektoren eine Basis bilden, reicht es zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind (siehe 5.33 und 5.19). Der Ansatz

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

führt sofort zu $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$, und somit ist auch $\lambda_2 = 0$.

zu ii) Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, muss $\mathbf{a}$ nur erfüllen, dass $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}$ linear unabhängig sind (siehe 5.33); jeder Vektor $\mathbf{a} \notin U$ leistet dies (warum?). Sei also $\mathbf{a} = (0, 1, 0, 0)^\intercal$. Der Ansatz

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

führt wieder sofort zu $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. Damit ist dann auch $\lambda_2 = 0$, was wiederum zu $\lambda_4 = 0$ führt.

zu iii) Entweder „sucht" man sich zunächst zwei orthogonale Vektoren (in U), oder wendet das Gram-Schmidt-Verfahren (siehe 6.42) auf zwei der in i) bestimmten Vektoren an. Die obigen Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_3$ sind bereits orthogonal (6.35), da ihr Skalarprodukt 0 ergibt. Es bleibt die Vektoren auf Länge 1 zu skalieren. Beide Vektoren haben die Länge $\sqrt{2}$ (siehe 6.28); also ist eine mögliche Lösung

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5. *Seien* $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ *die folgenden Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) *Man berechne* $A\,B^\intercal$ *und* $A^\intercal\,B$.

ii) *Man berechne* $\det(A\,B^\intercal)$ *und* $\det(A^\intercal\,B)$.

iii) *Ist* $A\,B^\intercal$, *bzw.* $A^\intercal\,B$ *invertierbar?*

zu i) Matrixmultiplikation (siehe 4.19 und 4.31);

$$A\,B^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^\intercal\,B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

zu ii) Nach 7.3 ist $\det(A\,B^\intercal) = 3\cdot 3 - (-3)\cdot 3 = 18$. Da die erste Spalte von $A^\intercal\,B$ gleich dem negativen der 4.ten Spalte von $A^\intercal\,B$ ist, sind diese Spalten linear abhängig. Folglich ist nach 7.8 iv) oder 7.11: $\det(A^\intercal\,B) = 0$. (Man kann natürlich auch die Determinante explizit berechnen).

zu iii) Nach 7.11 ist $A\,B^\intercal$ invertierbar, und $A^\intercal\,B$ ist nicht invertierbar.

6. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *sei*

$$A(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1+z \end{pmatrix}.$$

Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\det(A(z)) = 0$.

Entwicklung nach der (jeweils) 1.ten Zeile (siehe 7.2) liefert:

$$\begin{aligned} \det(A(z)) &= z \cdot \det \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1 \\ 1 & -1 & 1+z \end{pmatrix} \\ &= z \cdot \left(z \det \begin{pmatrix} z & 1 \\ -1 & 1+z \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1+z \end{pmatrix} \right) \\ &= z \cdot (z\,(z(1+z)+1) - (-1)) = z \cdot (z(z^2+z+1)+1) \\ &= z \cdot (z^3+z^2+z+1). \end{aligned}$$

Dieses Polynom besitzt höchstens vier verschiedene Nullstellen (3.55). $z = 0$ ist sicherlich eine Nullstelle von $\det(A(z))$, und es bleibt die Nullstellen von z^3+z^2+z+1 zu bestimmen. Man „sieht“, dass $z = -1$ eine Nullstelle ist, und Polynomdivision von z^3+z^2+z+1 durch $z+1$ liefert z^2+1. Dieses Polynom hat aber die Nullstellen $\pm\mathrm{i}$, und somit ist $\det(A(z)) = 0$ genau dann, wenn $z \in \{0, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.