Fakultät für Mathematik
Institute IAG und IMO
Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. M. Höding

Abschlußklausur zur Mathematik I
Fachrichtungen: IF, CV, CSE und WIF
5.2.2008

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer

Punktebewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	10	8	11	25	8	18	80
erreichte Punkte							

Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),\ z_2 = 81e^{i\pi} \text{ und } z_3 = i.$$

Berechnen Sie z_1^6, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_3}$ und alle Wurzeln der Gleichung $z^4 = z_2$.
Stellen Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ dar.

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k = 1 + n \cdot 2^{n+1}.$$

3. Gegeben sind die Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, 4$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig?

(b) Man bestimme alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, die orthogonal zu a_3 und a_4 ist.

(c) Beschreiben Sie die lineare Hülle der Vektoren $a_2, a_3, a_4 : [\{a_2, a_3, a_4\}]$, bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle und geben Sie ein minimales Erzeugendensystem an.

4. Betrachtet wird die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $(f(x) = y = Ax)$ mit der Abbildungsmatrix A, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung bijektiv?

(b) Man setze $\alpha = 6$ und bestimme Kern(f), die Dimension von Kern(f) und Bild(f) sowie die Urbildmenge von $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ liegt der Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{Bild}(f)$?

(d) Man weise nach, dass $\det(A) = 12$ für den Fall $\alpha = 10$ gilt und berechne $\det(A \cdot A^T)$ und $\det(2 \cdot A^{-1})$.

5. Man betrachte die Einträge der Matrix A aus Aufgabe 4 als Restklassen modulo 2.

   Für welche $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ ist A regulär?

   Man setze $\alpha = 0$ und gebe die Lösungsmenge $L(A, b)$ des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ über $\mathbb{Z}_2$ mit $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ elementweise an.

6. Wahr oder falsch? Begründen Sie sorgfältig Ihre Antwort!

   (a) Für die Matrix A mit Einträgen aus dem Restklassenkörper modulo 5 gibt es einen Wert a aus $\mathbb{Z}_5$, so daß die Matrix B invers zu A ist.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 4 \end{bmatrix}$$

   (b) Für orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $f(v) \cdot f(w) = 0$.

   (c) Es gibt reelle Zahlen a und b so, daß die Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \end{bmatrix}$ orthogonal ist.

   (d) In der Menge der Quaternionen gilt die Gleichung i·j·k= 1.

   (e) Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ hat die Eigenwerte 7 und 1.