Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. A. Pott, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2008/2009
20.02.2009

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**6**	**9**	**11**	**6**	**9**	**9**
Punkte						

Gesamtpunktzahl der Klausur = **50**	Note

Viel Erfolg!

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und numerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

1. Gegeben sei folgende binäre, reflexive und symmetrische Relation R mit

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \; 2(m-n) \text{ ist durch 10 teilbar } \}.$$

 i) Weisen Sie nach, dass die Relation R eine Äquivalenzrelation ist.

 ii) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es in $\mathbb{Z}$.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3 + 8i$.

 i) Bestimmen Sie

$$v = \frac{f(1-i)}{f(\sqrt[3]{2}\, i)} \quad \text{in der Form } v = x + y \cdot i; \; x, y \in \mathbb{R}.$$

 ii) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung $f(z) = 0$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + y \cdot i$; $x, y \in \mathbb{R}$ an.

 Hinweis: $\sin 30^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^o = \sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. Gegeben sei das Gleichungssystem $A\,\mathrm{x} = \mathrm{y}$ über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & \alpha - 2 \\ 0 & 3-\alpha & 2\alpha - 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 - 3\alpha \end{pmatrix}.$$

 i) Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $A\,\mathrm{x} = \mathrm{y}$ keine, genau eine und unendlich viele Lösungen.

 ii) Geben Sie für $\alpha = 2$ alle Lösungen von $A\,\mathrm{x} = \mathrm{y}$ an.

4. Gegeben sei das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ aus Aufgabe **3** über dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_3$ d.h. es wird modulo 3 gerechnet.
Bestimmen Sie alle Lösungen für $\alpha = 2$.

5. Gegeben seien die folgenden Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3\,x_2 \\ 2\,x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

   i) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_1 nicht linear ist.

   ii) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von f_2, den Kern von f_2 und die Dimension dieses Kerns.

6. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestimmen.

   ii) Orthonormalisieren Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.