Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2011/12
31.01.2012

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie A^2.

ii) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} der Matrix A.

iii) Zeigen Sie, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Lösung]

zu i) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

zu ii)

$$\begin{array}{cc|cc}
a & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\mid \cdot \frac{1}{a} (a \neq 0) \\
\\
\Lsh + \\
\mid \cdot (-\frac{1}{a}) \\
\\
\\
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{Probe: } \begin{array}{cc|cc}
 & & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\
 & & 0 & 1 \\
\hline
a & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

zu iii) Induktionsanfang: siehe i)!
Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n \cdot a & a^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei R eine binäre, reflexive und symmetrische Relation in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit

$$z_1 R z_2 \quad \text{genau dann, wenn } z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

wobei $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl in $\mathbb{C}$ bezeichnet. Weiterhin sei F die Abbildung

$$F : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \text{ mit } F(z) = \frac{1}{z}.$$

i) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation, also noch transitiv, ist.

ii) Man zeige $[\mathrm{i}]_R = \{z = x + \mathrm{i}\, y : x^2 + y^2 = 1\}$.

iii) Untersuchen Sie die Abbildung F auf Bijektivität.

[Lösung]

zu i) Transitivität: Es ist zu zeigen, dass für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt: $z_1 R z_2 \wedge z_2 R z_3 \Rightarrow z_1 R z_3$. Nun ist

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 \wedge z_2 R z_3 \Leftrightarrow z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_3 \cdot \bar{z}_3$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 = z_3 \cdot \bar{z}_3 \Rightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_3 \cdot \bar{z}_3$$

Also $z_1 R z_3$.

zu ii) Für alle $z = x + \mathrm{i}y \in [\mathrm{i}]_R$ gilt: $(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i}) = 1$. Also $x^2 + y^2 = 1$. Umgekehrt gilt für $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x^2 + y^2 = 1$: $z\bar{z} = 1 = \mathrm{i}(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}$. Also $z \in [\mathrm{i}]_R$.

zu iii) $F(z) = \frac{1}{z}$.
F ist injektiv, da $(F(z_1) = F(z_2)$ impliziert $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2}$ und so $z_1 = z_2$.
F ist nicht surjektiv, da 0 kein Urbild hat.

3. Gegeben seien die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Operation $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $x \oplus y = x + y + 1$.

i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

ii) Sei $U = \{2\,m + 1 : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ die Menge der ungeraden Zahlen. Ist auch $(U, \oplus)$ eine abelsche Gruppe?

[Lösung]

Für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt:

zu i)
0. $x \oplus y = x + y + 1 \in \mathbb{Z}$
1. $(x \oplus y) \oplus z = (x + y + 1) \oplus z = x + y + z + 2$
$= x \oplus (y + z + 1) = x \oplus (y \oplus z)$ (Assoziativität)

2. $x \oplus y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \oplus x$ (Kommutativität)
3. $x \oplus x_N = x + x_N + 1 = x \Rightarrow x_N = -1 \in \mathbb{Z}$ (Neutrales Element $x_N = -1$ existiert.)
4. $x \oplus x_I = x + x_I + 1 = -1$
   $\Rightarrow x_I = -2 - x = -(x+2) \in \mathbb{Z}$ (Inverses Element $x_I = -(x+2)$ zum Element x existiert.)

zu ii) Zunächst bemerken wir, dass $x + y + 1$ wieder eine ungerade Zahl ist, wenn x, y ungerade sind. Da $U \subset \mathbb{Z}$ gelten somit 0,1,2 aus i) auch für $(U, \oplus)$. Nun ist -1 ungerade, und da $-(x+2)$ ungerade ist für x ungerade, liegen auch das neutrale Element und inverse Element in U. Also ist $(U, \oplus)$ abelsche Gruppe.
Oder wir benutzen das Untergruppenkriterium.
$2\,m_1 + 1 \oplus -(2\,m_2 + 1 - 2) = 2(m_1 - m_2 - 1) + 1 \in U$, da $m_1 - m_2 - 1 \in \mathbb{Z}$.

4. Gegeben seien die lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ mit $f(x) = Ax$ durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Vektoren $\mathbf{a} = (1,3,0)^\intercal \in \mathbb{Z}_5^3$ und $\mathbf{b} = (4, \beta, 3)^\intercal \in \mathbb{Z}_5^3$ mit $\beta \in \mathbb{Z}_5$.

Hierbei repräsentieren die Zahlen die Äquivalenzklassen modulo 5.

i) Bestimmen Sie bzgl. der Abbildung f die Urbilder von $\mathbf{a}$.

ii) Geben Sie die Dimension von Kern f an.

iii) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{Z}_5$ so, dass $\mathbf{b}$ nicht in Bild f ist.

[Lösung]

zu i) Mit Blick auf iii) wenden wir das Gauß-Verfahren für die beiden rechten Seiten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ an. Gauß:

$$\begin{array}{ccc|c|lcc}
1 & 0 & 3 & 1 & 4 & |\cdot 3 & |\cdot 2 \\
2 & 1 & 4 & 3 & \beta & \leftarrow + & \\
3 & 2 & 0 & 0 & 3 & & \leftarrow \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 4 & & \\
0 & 1 & 3 & 1 & \beta + 2 & |\cdot 3 & \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & & \leftarrow + \\
\hline
1 & 0 & 3 & 1 & 4 & & \\
0 & 1 & 3 & 1 & \beta + 2 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3\beta + 2 & &
\end{array}$$

Also $x_3 = t \in \mathbb{Z}_5$ und $x_2 = 1 + 2t$ sowie $x_1 = 1 + 2t$.

Damit sind $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Urbilder von $\mathbf{a}$.

zu ii) Aus i) folgt $\operatorname{rg}(A) = 2$ und somit $\dim \operatorname{Kern} f = 1$.

zu iii) Aus dem Gauß-Verfahren in i) für $\mathbf{b}$ folgt: $\mathbf{b}$ liegt nicht im Bild von f geanu dann, wenn $3\beta + 2 \neq 0$, d.h. $\beta \in \{0, 2, 3, 4\}$.

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der Unterraum gegeben durch

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

i) Man zeige: $\dim U = 2$.

ii) Seien $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ eine Basis von U und seien $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1)^\intercal$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1)^\intercal$. Man zeige,

a) $\mathbf{u}_i$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}_j$, $1 \leq i, j \leq 2$.

b) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

[Lösung] In Matrixform lässt sich U beschrieben als

$$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entweder löst man nun dieses homogene Gleichungssystem und findet so eine explizite Basis von U bestehend aus zwei Vektoren, oder man kann auch argumentieren: Die beiden Zeilen von A sind linear unabhängig (sie sind keine Vielfachen voneinander), und somit ist $\operatorname{rg}(A) = 2$. Zusammen mit Satz 6.24 folgt $\dim U = 4 - \operatorname{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

zu ii) a): Da $\mathbf{u}_i \in U, 1 \leq i \leq 2$, erfüllen die Vektoren die beiden Gleichungen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Dies bedeutet aber gerade $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, d.h. sie sind zueinander orthogonal (s. Definition 7.11).

Da $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ reicht es zu zeigen, dass $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind. Dazu seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_1 + \lambda_4 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Nach Wahl von $\mathbf{v}_1$ ist $\mathbf{v}_1$ orthogonal zu $\mathbf{v}_2$ und nach a) auch orthogonal zu $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$. Somit ist

$$0 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_1 + \lambda_4 \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_3 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = 4\lambda_3.$$

Also $\lambda_3 = 0$. Analog folgt für $\mathbf{v}_2$, der orthogonal ist zu $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_1 + \lambda_4 \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_4 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = 4\lambda_4.$$

Also auch $\lambda_4 = 0$. Also muss gelten $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Da aber nach Voraussetzung $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ linear unabhängig sind, folgt auch $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

6. Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z+3 & 0 \\ 17 & z & 5 & 19 \\ 2 & 0 & 11 & -z \\ z & 0 & 13 & 1-z \end{pmatrix}.$$

i) Man zeige $\det A(z) = -z^4 - z^3 + 4z^2 - 6z$.

ii) Man bestimme in Polarkoordianten alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\det A(z) = 0$.

[Lösung] Entwicklung nach der 1.ten Zeile und anschließend nach der 2.ten Spalte liefert

$$\begin{aligned}
\det A(z) &= (z+3) \cdot \det \begin{pmatrix} 17 & z & 19 \\ 2 & 0 & -z \\ z & 0 & 1-z \end{pmatrix} = -(z+3) \cdot z \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix} \\
&= -(z+3) \cdot z \cdot (2(1-z) + z^2) = -(z+3) \cdot z \cdot (z^2 - 2z + 2) \\
&= -z^4 - z^3 + 4z^2 - 6z.
\end{aligned}$$

Wegen $\det A(z) = -(z+3) \cdot z \cdot (z^2 - 2z + 2)$ sind die vier Nullstellen (siehe Satz 3.56) von $\det A(z)$ gegeben durch $z = -3$, $z = 0$ und den Nullstellen des quadratischen Polynoms $z^2 - 2z + 2$. Mittels der (p,q)-Formel findet man hier die beiden Nullstellen

$$z_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm \mathrm{i}.$$

Insgesamt sind also $\{-3, 0, 1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$ die Nullstellen von $\det A(z)$, und in Polardarstellung erhält man

$$\begin{aligned}
z &= -3 = -3\,(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0), \quad z = 0 = 0\,(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0), \\
z &= 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}\,(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}), \\
z &= 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}\,(\cos \frac{7}{4}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{7}{4}\pi).
\end{aligned}$$