Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Willems, Dr. M. Höding

## Modulprüfung Mathematik I (MP MAI)

oder

## unbenoteter Leistungsnachweis (LN MAI)

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WS 2012/2013
29.01.2013

| Name | Vorname | Fachrichtg. | Matr.nr. | MP MAI/LN MAI |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Anzahl der abgegebenen Blätter | |
|---|---|

### Punktebewertung der Klausur

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **max. Punkte** | 8 | 8 | 9 | 8 | 9 | 8 |
| **Punkte** | | | | | | |

| Gesamtpunktzahl der Klausur = 50 | Note |
|---|---|
| | |

### Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

**Viel Erfolg!**

1. (a) Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot 2^k = 1 + n\cdot 2^{n+1}$.

   (b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und die Bézout-Koeffizienten von 612 und 900 mithilfe des Euklid'schen Algorithmus.

2. Sei $R$ eine binäre Relation über der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 + 2x_2 = y_2 + 2x_1.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Relation $R$ eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[(1,0)]_R$ und $[(0,1)]_R$ und veranschaulichen Sie diese.

3. Die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ wird durch die Verknüpfung $*$, die durch die folgende Verknüpfungstabelle definiert ist

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $b$ | $c$ | $a$ | $d$ | $b$ |
| $c$ | $b$ | $d$ | $a$ | $c$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

eine Gruppe.

   (a) Bestimmen Sie das neutrale Element.

   (b) Bestimmen Sie alle Untergruppen.

   (c) Bestimmen Sie die Inversen und die Ordnungen von $a, b$ und $d$.

   (d) Ermitteln Sie $x \in M$ aus der Gleichung $a * (x * c) = b$. (Begründung.)

4. Gegeben seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3$ und $v$ im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ und $k \in \mathbb{C}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ ki \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \\ k \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{C}$, so dass $v_1, v_2, v_3$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ bilden.

   (b) Stellen Sie $v$ als Linearkombination einer Basis $v_1, v_2, v_3$ dar.

5. Gegeben seien die lineare Abbildung $A : \mathbb{Z}^3/_{3\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}^3/_{3\mathbb{Z}}$ mit

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3/_{3\mathbb{Z}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension vom Kern und Bild der Abbildung $A$.

(b) Liegt $v_1$ in Bild von $A$? (Begründung.)

(c) Bestimmen Sie $\{v \in \mathbb{Z}^3/_{3\mathbb{Z}} | \, Av = v_2\}$.

6. (a) Bestimmen Sie alle Diagonalmatrizen $D \in (\mathbb{R})_2$, so dass $AD = DA$ für alle $A \in (\mathbb{R})_2$.

(b) Zeigen Sie:

Es gibt keine Matrizen $A, B \in (\mathbb{R})_2$ mit $AB - BA = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hilfe: Rechnen Sie oder benutzen Sie die *Spur*.

(c) Bestimmen Sie $det\, A$ für $A \in (\mathbb{R})_2$ mit $AA^t = E$. (Begründung.)