Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Willems, Dr. M. Höding

Wiederholung zur
Modulprüfung Mathematik I (MP MAI)
oder zum
unbenoteten Leistungsnachweis (LN MAI)

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WS 2012/2013
27.03. 2013

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matr.nr.	MP MAI/LN MAI

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
max. Punkte	7	9	9	9	8	8
Punkte						

Gesamtpunktzahl der Klausur	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1. Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Kompositionen $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ und das Signum von σ_1 und σ_2.

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} von

$$A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \in (\mathbb{C})_2.$$

3. Gegeben sei die Menge $M = \{z_k \in \mathbb{C} : z_k = e^{\frac{k\pi}{2}i};\ k = 0, 1, 2, 3\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M mit der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet.

(b) Bestimmen Sie alle nichttrivialen Untergruppen.

(c) Bestimmen Sie die Ordnungen von $z_2 = e^{\pi i}$ und $z_3 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

4. Gegeben seien die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & \beta & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} x$$

und der Vektor

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung A bijektiv?

(b) Setzen Sie $\beta = 6$ und bestimmen Sie den Kern der Abbildung A und die Dimension des Kerns.

(c) Setzen Sie $\beta = 0$. Liegt v im Bild von A?

5. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem im Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & \alpha \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die α, für die das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

(b) Setzen Sie $\alpha = 2$ und bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems.

6. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & x \\ x & 2x \end{bmatrix} \in (\mathbb{R})_2.$$

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $A^t = A^{-1}$.
(Die transponierte Matrix von A ist gleich der inversen Matrix von A.)

(b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$, so dass $\det(B^{-1}) = \frac{1}{9}$ gilt.