Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2013/14

04.02.2014

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1.

i) Sei R die folgende Relation auf $\mathbb{R}$:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \cdot y \geq 0\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

ii) Untersuchen Sie die folgende Abbildung f auf Injektivität und Surjektivität:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2. \end{aligned}$$

[Lösung]

i) Refl.: $x \cdot x = x^2 \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$
Symm.: $x \cdot y \geq 0 \Rightarrow y \cdot x = x \cdot y \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$
Trans.: $1 \cdot 0 \geq 0$ und $0 \cdot (-1) \geq 0$, aber $1 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow R$ ist nicht transitiv

ii) Nicht injektiv, da $f(1) = f(-1)$.
Surjektiv, da $\forall z \in \mathbb{C} \exists r \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \phi \in [0, 2\pi)$ mit $z = re^{i\varphi}$ und dann $f\left(\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = z$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

i) Berechnen Sie $A^2, A^T A$ und A^{-1}.

ii) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Lösung]

i) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Induktionsanfang: Der Fall $n = 1$ ist gerade die Beschreibung der Matrix A, oder auch für $n = 2$ folgt dies aus i) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Induktionsschluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Sei in der Menge $\mathbb{Z}_7$ aller Restklassen modulo 7 folgende Operation $\circ$ erklärt:

$$\circ : \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7 \text{ mit } \circ([a]_7, [b]_7) = [a]_7 \circ [b]_7 = [a+b+6]_7.$$

i) Bestimmen Sie das neutrale Element.

ii) Bestimmen Sie die inversen Elemente von $[2]_7$ und $[5]_7$.

iii) Bestimmen Sie $[x]_7$ aus der Gleichung: $[x]_7 \circ [5]_7 = [2]_7$.

[Lösung]

i) $[a]_7 \circ [n]_7 = [a]_7$

$\Rightarrow [a+n+6]_7 = [a]_7$

$\Rightarrow n = 1$, d. h. $[n]_7 = [1]_7$ (Neutrales Element)

ii) Sei $[c]_7$ das inverse Element von $[2]_7$. Dann muss gelten $[2]_7 \circ [c]_7 = [1]_7$

$\Rightarrow [2+c+6]_7 = [1]_7$

$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow [c]_7 = [0]_7$ (Inverses von $[2]_7$)

Für $[5]_7$ ergibt sich $[5]_7 \circ [c]_7 = [1]_7$

$\Rightarrow [5+c+6]_7 = [1]_7$

$\Rightarrow c = 4 \Rightarrow [c]_7 = [4]_7$ (Inverses von $[5]_7$)

iii) $[x]_7 \circ [5]_7 = [2]_7 \quad | \circ [4]_7$

$[x]_7 \circ [1]_7 = [2+4+6]_7 = [5]_7$

$\Rightarrow [x]_7 = [5]_7$

4. Geben sei das folgende Gleichungssystems über $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathrm{i}\,x_1 & - & x_2 & - & \mathrm{i}\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & \mathrm{i}\,x_2 & + & x_3 & = & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & + & \alpha\,\mathrm{i}\,x_3 & = & \beta \end{array}$$

Bestimmen Sie α, $\beta \in \mathbb{C}$ so, dass das Gleichungssystem

i) keine Lösung hat,

ii) genau eine Lösung hat,

iii) unendlich viele Lösungen hat.

[Lösung]

$$\left(\begin{array}{rrr|r} i & -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 2 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & \alpha\mathrm{i} & \beta \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrc|c} \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -\mathrm{i} & 3 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & (\alpha-1)\mathrm{i} & \beta+1 \end{array}\right)$$

i) Keine Lösung, wenn $\alpha - 1 = 0$ und $\beta + 1 \neq 0$, d. h. $\alpha = 1$ und $\beta \neq -1$.

ii) Genau eine Lösung, wenn $\alpha \neq 1$ und β beliebig.

iii) Unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha = 1$ und $\beta = -1$.

5. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und $\dim \mathrm{Kern}(f)$.

ii) Untersuchen Sie, ob der Vektor $(1, 1, 13)^\intercal$ in $\mathrm{Bild}(f)$ liegt.

iii) Bestimmen Sie das Bild$f(\mathbf{v})$ des Vektors $\mathbf{v} = (1, 0, 1, 0)^\intercal$.

[Lösung]

i)

$$\left(\begin{array}{rrrr|c|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|c|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|c|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Kern}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \lambda\,(-3, 0, 1, 1)^\intercal, \lambda \in \mathbb{R}\}$ und so $\dim \mathrm{Kern}(f) = 1$

ii) $(1,1,13)^\intercal$ liegt in Bild, da $A\mathbf{x} = (1,1,13)^\intercal$ die Lösungen $\mathbf{x} = (1,2,1,0)^\intercal + \lambda\,(-3,0,1,1)^\intercal, \lambda \in \mathbb{R}$ hat.

iii) $f(1,0,1,0)^\intercal = A(1,0,1,0)^\intercal = (3,-1,7)^\intercal$.

6.

i) Sei $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^\intercal$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^\intercal$, und sei $W \subset \mathbb{R}^4$ der Unterraum

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}\rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}\rangle = 0\}.$$

a) Man bestimme eine Basis und die Dimension von W.

b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von W.

ii) Sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, und sei $\|\cdot\|$ die Standardnorm auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^\intercal\mathbf{x}}$.

Man beweise: Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|U\,\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|.$$

[Lösung] zu i) a): Es ist

$$W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

und ein Schritt im Gaussalgorithmus liefert das System (als erweiterte Matrix)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist (z.B.)

$$W = \left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren $\mathbf{w}_1 = (1,-1,0,0)^\intercal$, $\mathbf{w}_2 = (0,0,1,-1)^\intercal$ bilden eine Basis von W und die Dimension von W ist daher 2 (siehe Def 5.23).

zu i) b): Seien $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ die Vektoren aus a). Es ist $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = 0$ und wegen $\|\mathbf{w}_1\| = \|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{2}$, bilden $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2$ eine Orthonormalbasis von W (siehe Def. 7.12).

zu ii) Für eine orthonormale Matrix gilt $U^\intercal U = I_n$ (siehe Def 7.15). Damit ist

$$\|U\,\mathbf{v}\|^2 = (U\,\mathbf{v})^\intercal (U\,\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\intercal U^\intercal U\,\mathbf{v} = \mathbf{v}^\intercal I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}^\intercal\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2.$$