Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2013/14

26.03.2014

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. a) Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, und sei R die binäre Relation auf $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$(a,b)R(c,d) \text{ genau dann, wenn } a \cdot d - b \cdot c = 0.$$

i) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

ii) Geben Sie 3 Elemente der Äquivalenzklasse von $(5,3)$ an.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x - 4).$$

[Lösung]

a.i) Reflexivität: $a \cdot b - b \cdot a = 0$ für alle $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, also $(a,b)R(a,b)$.

Symmetrie: Es gelte $a \cdot d - b \cdot c = 0$. Dann ist auch

$$c \cdot b - d \cdot a = -(a \cdot d - b \cdot c) = 0.$$

Also folgt aus $(a,b)R(c,d)$, dass $(c,d)R(a,b)$.

Transitivität: Es gelte $a \cdot d - b \cdot c = 0$ und $c \cdot f - d \cdot e = 0$. Die Gleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ $(0 \notin \mathbb{N})$. Damit gilt auch $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, was umgeformt werden kann zu $a \cdot f - b \cdot e = 0$. Also folgt aus $(a,b)R(c,d)$ und $(c,d)R(e,f)$, dass $(a,b)R(e,f)$.

a.ii) Die Äquivalenzklasse $[(5,3)]_R$ besteht aus allen Vielfachen des Tupels $(5,3)$, also beispielsweise $(5,3)$, $(10,6)$, $(15,9) \in [(5,3)]_R$.

b) Der Logarithmus ist nur für positive reelle Zahlen definiert. D ist also die Lösung der Ungleichung

$$x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms sind -1 und 4. Es lässt sich daher faktorisieren zu $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$. Die Ungleichung ist erfüllt, wenn beide Faktoren $(x+1)$ und $(x-4)$ dasselbe Vorzeichen haben. Für $x < -1$ sind beide negativ und für $x > 4$ positiv. Daraus ergibt sich

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < -1 \text{ oder } x > 4\} = (-\infty, -1) \cup (4, \infty).$$

2. Sei $\mathbb{Z}_5$ die Menge aller Restklassen modulo 5 und sei auf der Menge $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \backslash \{[0]_5\}$ die folgende Operation $\circ$ erklärt:

$$\circ : \mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_5^* \to \mathbb{Z}_5^* \text{ mit } \circ([a]_5, [b]_5) = [a]_5 \circ [b]_5 = [a \cdot b \cdot 3]_5.$$

(i) Zeigen Sie, dass $[2]_5$ das neutrale Element der Operation $\circ$ in $\mathbb{Z}_5^*$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die inversen Elemente von $[1]_5$ und $[4]_5$.

(iii) Bestimmen Sie $[x]_5$, so dass $[x]_5 \circ [4]_5 = [3]_5$.

[Lösung]

zu (i) $[a]_5 \circ [n]_5 = [a]_5 \Rightarrow [a \cdot n \cdot 3]_5 = [a]_5$
$\Rightarrow [n \cdot 3]_5 = [a]_5 \Rightarrow n = 2$, d. h. $[n]_5 = [2]_5$ (Neutrales Element)

zu (ii) $[1]_5 \circ [I_1]_5 = [2]_5 \Rightarrow [1 \cdot I_1 \cdot 3]_5 = [2]_5$
$\Rightarrow I_1 = 4 \Rightarrow [I_1]_5 = [4]_5$ (Inverses von $[1]_5$)
$[4]_5 \circ [I_4]_5 = [2]_5 \Rightarrow [4 \cdot I_4 \cdot 3]_5 = [2]_5$
$\Rightarrow I_4 = 1 \Rightarrow [I_4] = [1]_5$ (Inverses von $[4]_5$)

zu (iii) $[x]_5 \circ [4]_5 = [3]_5 \qquad | \circ [1]_5$ (Inverses von $[4]_5$)
$\Rightarrow [x]_5 \circ [2]_5 = [3] \circ [1]_5$
$\Rightarrow [x]_5 = [3 \cdot 1 \cdot 3]_5 = [4]_5$
$\Rightarrow [x]_5 = [4]_5$

3. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & a\,x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & a\,x_3 & = & -6 \\ & - & a\,x_2 & - & 4x_3 & = & 3\,a+2 \end{array}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung hat,

(ii) unendlich viele Lösungen hat,

(iii) keine Lösung hat.

[Lösung]

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & a & 2 \\ -2 & 1 & -a & -6 \\ 0 & -a & -4 & 3a+2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \\ 0 & -a & -4 & 3a+2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{lll|c} 1 & 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array}\right)$$

zu (i) $a^2 - 4 \neq 0$, also $a \neq 2 \wedge a \neq -2$

zu (ii) $a^2 - 4 = 0 \wedge a + 2 = 0$, also $a = -2$

zu (iii) $a^2 - 4 = 0 \wedge a + 2 \neq 0$, also $a = 2$

4. Die Menge $U = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{21} = 0\}$ aller reellen oberen 2×2 Dreiecksmatrizen bilden einen dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$. In U seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass A_1, A_2 und A_3 eine Basis von U bilden.

(ii) Stellen Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von A_1, A_2 und A_3 dar.

[Lösung]

zu (i) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \text{ hat nur die Lösung } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind A_1, A_2 und A_3 linear unabhängig. Die Dimension von U ist 3 und $\{A_1, A_2, A_3\}$ ist eine Basis von U.

zu (ii)

α_1	α_2	α_3	
2	0	0	-2
1	1	-1	0
0	3	0	6

$\alpha_1 = -1$
$\alpha_2 = 2$
$\alpha_3 = 1$

$B = -A_1 + 2A_2 + A_3$

5. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1.

(ii) Bestimmen Sie einen weiteren Eigenwert λ_2 von A.

[Lösung]

zu (i) $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \quad |\cdot 2 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & \leftarrow + \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = -\frac{1}{2}t$

$$= t^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu (ii) $\det(A - \lambda_2 I) = 0$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda_2 & 1 \\ 2 & -4 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = (3-\lambda_2)((4-\lambda_2)(-\lambda_2)+4) = 0$

$\Rightarrow 3 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 3$

6.

a) Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ und sei $W = \text{lin}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Man beweise: Für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{a} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in W \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \rangle = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m.$$

b) Seien $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)^\intercal$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 5)^\intercal$, $\mathbf{v}_3 = (1, 9, 7)^\intercal \in \mathbb{R}^3$.

i) Man bestimme die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren in $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

ii) Man bestimme alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{a} \rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{w} \in \text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

[Lösung] zu a) Die Richtung "$\Rightarrow$" ist sicherlich richtig, da $\mathbf{v}_i \in W$, $1 \leq i \leq m$. Für den Beweis von "$\Leftarrow$" sei $\mathbf{w} \in W$. Dann gibt nach Bemerkung 5.13, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i$. Zusammen mit Definition 7.1 und der

Voraussetzung folgt

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{a} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \rangle = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \rangle) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i\, 0) = 0.$$

zu b) i) Da die ersten beiden Vektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig. Andererseits ist z.B. $(-3)\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$, d.h., alle drei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sind linear abhängig. Somit ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektoren 2.

zu b) ii) Nach a) reicht es alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen mit $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \rangle = 0$, $1 \le i \le 3$, bzw. nach Teil b) i) reicht es dies z.B. für die ersten beiden Vektoren zu fordern (geht aber auch ohne). Man erhält ein homogenes Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Schritt im Gaußverfahren führt zu dem äquivalenten System in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist also gleich $\{\mu\,(8, 3, -5)^{\mathsf{T}} : \mu \in \mathbb{R}\}$.