Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. G. Kyureghyan, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WS 2016/17
30.03.2017

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5
max. Punkte	10	10	10	10	10
Punkte					

Gesamtpunktzahl der Klausur = 50	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1. Gegeben seien die Funktionen $f_1 : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = -3x + 2$ und $f_2 : [-1,\, 1] \to [0,\, 1]$ mit $f_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$, wobei $[a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ gilt.

   a) Untersuchen Sie Funktionen f_1 und f_2 auf ihre Eigenschaften (Surjektivität und Injektivität).

   b) Bestimmen Sie die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$, wenn sie definiert sind.

   c) Untersuchen Sie Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$, falls sie existieren, auf ihre Eigenschaften (Surjektivität und Injektivität).

2. Gegeben sei die komplexe Zahl $z_1 = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}\, i$.

   (a) Zeigen Sie, dass $z_2 = z_1^2 = 2 + 2\,i$ gilt.

   (b) Geben Sie $z_2 = z_1^2$ in trigonometrischer Form (in Polarkoordinaten) an.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $z^2 = z_2 - 2$.

3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS) über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 &= -b \end{aligned}$$

   Untersuchen Sie, für welche Werte der Parameter a und b das LGS

   a) eine eindeutige Lösung hat.

   b) keine Lösung hat.

   c) unendlich viele Lösungen besitzt. Geben Sie diese mittels eines selbstgewählten Parameters an.

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$.

a) Geben Sie die Matrix $A \cdot A$ an.

b) Ermitteln Sie die inverse Matrix A^{-1}.

c) Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

5. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ mit $f(x) = A \cdot x$

$$\text{und } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension des Bildraumes $Bild(f)$ in Abhängigkeit von α.

b) Setzen Sie $\alpha = 4$. Bestimmen Sie $Kern(f)$ und die Dimension von $Kern(f)$. Geben Sie eine Basis für $Kern(f)$ an.

c) Setzen Sie $\alpha = 1$ und bestimmen Sie das Bild von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.