Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. T. Kahle, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering, Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WiSe 2019/20
12.02.2020

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
max. Punkte	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
Punkte					

Gesamtpunktzahl der Klausur = 50	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1) Gegeben seien die die Menge $M = \{1,\ 2,\ a,\ b\}$.

(a) Untersuchen Sie, ob die Relation

$$R = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (a,a),\ (a,b),\ (b,a),\ (b,b)\}$$

in M eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

(b) Geben Sie je eine Abbildung $f\colon A \to B$ mit $A,\ B \subseteq M$ an, sodass gilt:

(i) f ist surjektiv aber nicht injektiv,

(ii) f ist injektiv aber nicht surjektiv,

(iii) f ist bijektiv.

(c) In der Menge M sei die assoziative Operation $\circ$ mithilfe der folgenden Operationstabelle definiert:

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & 1 & 2 & a & b \\ \hline 1 & a & b & 1 & 2 \\ 2 & b & a & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 & a & b \\ b & 2 & 1 & b & a \end{array}.$$

Untersuchen Sie, ob $(M, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

2) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ und eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B^{n+1} = B$ und $\det(B) = 2$.

(a) Berechnen Sie A^3 und bestimmen Sie unter Nutzung des Ergebnisses die inverse Matrix A^{-1} von A.

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix B^{-1} von B.

(c) Berechnen Sie $\det(3B^2)$.

3) Gegeben sei das folgende Lineare Gleichungssystem (LGS) über $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 2y & + & \alpha z & = & 1 \\ 12x & - & 9y & - & \alpha z & = & 2\alpha\,, \quad \alpha \in \mathbb{K}. \\ -15x & + & 10y & + & (\alpha^2+6)z & = & 2\alpha - 1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass das LGS über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

(i) keine Lösung,

(ii) eine eindeutige Lösung,

(iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

(b) Setzen Sie $\alpha = 1$ und ermitteln Sie die Lösung des LGS über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

4) Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ -2x + 3y + z \\ y + z \\ 3x + 3z \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild von $(2,\ 1,\ 1)^T$.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix A zur Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ an.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Kern} f$ und $\mathrm{Bild} f$.

(d) Untersuchen Sie, ob der Vektor $(2,\ 3,\ 5,\ 7)^T$ in $\mathrm{Bild} f$ liegt.

5) Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$).

(c) Treffen Sie eine Aussage zur Diagonalisierbarkeit der Matrix A und begründen Sie Ihre Aussage.