Fakultät für Mathematik
IAN/IMO

Magdeburg, 30. Januar 2006

Wiederholung Mathematik I / II für Informatik, Computervisualistik, Ing.-Informatik und Wirtschaftsinformatik

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer	Wiederholer
				ja/nein

Punktebewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte										
erreichte Punkte										

Jede Antwort ist zu begründen!

1. Beweisen Sie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2. Bestimmen Sie die Lösungen $z = x + yi$ der folgenden Ungleichungen und stellen Sie diese in der Gaußchen Zahlenebene dar:

$$\left|\frac{z}{2i-1}\right| \leq \left(\frac{i}{2i+1}\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i\right).$$

3. In der Menge $\mathbb{R}^2$ sei folgende Relation R gegeben:

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + 4y_2 = x_2^2 + 4y_1.$$

   (a) Untersuchen Sie die Relation R auf ihre Eigenschaften.

   (b) Gibt es eine Klasseneinteilung in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Relation R? Wenn ja, beschreiben Sie die Klassen $[a, a]_R$ mit $a \in \mathbb{R}$ und die Klassen allgemein.

4. Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sei folgende Operation definiert:

$$x \circ y = x + y + xy.$$

   Untersuchen Sie die Struktur $\mathbb{Z}(\circ)$ auf ihre Eigenschaften.

5. Gegeben seien die Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Menge $M = \{E, A, A^2, A^3\}$.

   (a) Untersuchen Sie die Struktur $M(\cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Matrizenmultiplikation ist.

   (b) Untersuchen Sie die Strukturen $M(\cdot)$ und $\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}\,(\odot)$ auf Isomorphie, wobei $\odot$ die Restklassenmultiplikation sei.

6. Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ bijektiv?

   (b) Liegt der Einheitsvektor $(1,0,0)^T$ im Falle $\lambda = 2$ im Bildraum der Abbildung f? Begründen Sie Ihre Aussage.

   (c) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung f und die Dimension des Kerns in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x_1 & + & x_2 & & & = & \beta \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & y_3 & = & \beta \\ & & x_2 & + & \alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$

   (a) Bestimmen Sie das Lösungsverhalten des Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Bestimmen Sie im Falle $\beta = 1$ alle Lösungen in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ auf Konvergenz.

9. Ermitteln Sie $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ für $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x^2}$.

   (a) Bestimmen Sie die 1. Ableitung von $f(x) = (x+1)^{x+1}$ für $x > 1$.

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$.