Fakultät für Mathematik
Institute IAG und IMO
Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. M. Höding

**Abschlußklausur zur Mathematik I (Wiederholer und Nachzügler)**
**Fachrichtungen: IF, CV, CSE und WIF**
**26.03.2008**

**Bitte in Druckschrift ausfüllen!**

| Name | Vorname | Fachrichtung | Matrikelnummer |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Punktebewertung**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 11 | 8 | 14 | 15 | 13 | 19 | 80 |
| erreichte Punkte | | | | | | | |

**Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!**
**Beginnen Sie bei jeder Aufgabe mit einem neuen Blatt!**

1. In der Menge $M_{n\times n}$ aller quadratischen Matrizen vom Format $n \times n$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ werden die folgenden Relationen betrachtet:

   (a) $ARB \leftrightarrow B = A^T$

   (b) $AR^*B \leftrightarrow \det(A) = \det(B)$

   (1) Zeigen Sie, dass die Relation $R$ symmetrisch ist. Warum ist $R$ keine Äquivalenzrelation?

   (2) Die Relation $R^*$ ist Äquivalenzrelation. Weisen Sie die Transitivität nach! Geben Sie die Äquivalenzklassen an und bestimmen Sie eine vollständige Repräsentantenmenge der Äquivalenzklassen!

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl größer 1 ergibt bei Teilung durch 8 den Rest 1, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$(2n+1)^2 \equiv 1 \mod 8$$
   Läßt sich die Aussage auch direkt beweisen?

3. Gegeben sind die Matrizen $A, B$ und $C$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Man bestimme $C^{-1}$.

   (b) Man berechne die Matrix $X \in M_{2\times 2}$, die die Matrizengleichung $C \cdot X = A \cdot B - 2C$ erfüllt.

   (c) Welche Matrizenprodukte mit 2 Faktoren aus $\{A, B, C\}$ sind nicht definiert?

   (d) Man berechne $\det(4C^2 \cdot C^{-1})$.

4. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$:

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$.

   (b) Geben Sie zwei zueinander orthogonale Eigenvektoren an.

   (c) Benutzen Sie das Ergebnis aus (b), um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren.

5. Gegeben ist folgendes Gleichungssystem im Restklassenkörper modulo 3. Dabei wird abkürzend $k$ für $[k]_3$ verwendet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & \alpha \end{array}$$

(a) Für welche $\alpha$ ist das Gleichungssystem unlösbar?

(b) Man setze $\alpha = 2$ und bestimme die Lösungsmenge $L(A, b)$ des Gleichungssystems.

(c) Man gebe alle Lösungen an, die $x_2 = 1$ erfüllen.

6. Wahr oder falsch? Begründen Sie sorgfältig Ihre Entscheidung!

(1) Die komplexe Zahl $z^* = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ ist eine Lösung der Gleichung $z^6 = -i$.

(2) Die Vektoren $a_1$ und $a_3$ bilden eine Basis der linearen Hülle der Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Gegeben ist die Matrix $A$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & a & -1 \\ 6 & -6 & b \end{bmatrix}$$

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $A$ regulär.

(b) Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsmatrix $A$ gilt: Es gibt genau ein Wertepaar $(a, b)$, so dass Bild $(f)$ die Dimension 1 hat.

(c) Für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Abbildungsmatrix $A$ gilt: Es gibt genau ein Wertepaar $(a, b)$, so dass Kern$(f)$ die Dimension 1 hat.