Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. T. Kahle, Dr. M. Höding

Wiederholung der Modulprüfung Mathematik I

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WiSe 2018/19
27.03.2019

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
max. Punkte	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
Punkte					

Gesamtpunktzahl der Klausur = 50	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $det(A)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$det(A^n) = a^{3 \cdot n}.$$

(b) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die inverse Matrix A^{-1} der Matrix A existiert und bestimmen Sie im Falle der Existenz die inverse Matrix A^{-1} in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

(c) Ermitteln Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

2) (a) Sei R eine Relation auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert durch

$$xRy \text{ genau dann, wenn } x \cdot y \leq 0.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen f_1 und f_2 auf Injektivität und Surjektivität:

$$f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z| \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}.$$

3) Gegeben sei die Menge $M = \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ mit der assoziativen Multiplikation $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Assoziativität nicht nachzuweisen ist.

(b) Ermitteln Sie die inversen Elemente.

(c) Bestimmen Sie (x,y) aus der Gleichung $(0,1) \cdot (x,y) = (-1,0)$.

4) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über dem Körper $\mathbb{K}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

(c) Ermitteln Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

5) Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die f bijektiv ist.

(b) Geben Sie alle α an, für die f nicht injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie in den Fällen, dass f nicht injektiv ist, den Kern von f und seine Dimension.

(d) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = (1, -2, -5)^T$ im Fall $\alpha = 2$.