Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2007
19.07.2007

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Man untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz/(bestimmte)Divergenz, und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

i) $a_n = \dfrac{(n+2)^2-(n-3)^2}{2\,n}$, ii) $a_n = \dfrac{(n!)^{n-1}}{((n-1)!)^n}$, iii) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

zu i) $a_n =$

$$\frac{(n+2)^2-(n-3)^2}{2\,n} = \frac{n^2+4\,n+4-(n^2-6\,n+9)}{2\,n} = \frac{10\,n-5}{2\,n} = 5 - \frac{5}{2}\frac{1}{n},$$

und somit (siehe 9.15)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{5}{2}\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 - \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5.$$

zu ii) $a_n =$

$$\frac{(n!)^{n-1}}{((n-1)!)^n} = \frac{(n(n-1)!)^{n-1}}{((n-1)!)^n} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\overbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n-1} \geq n.$$

Somit ist a_n nicht beschränkt und daher divergent (siehe 9.12).

zu iii) $a_n =$

$$\sqrt{n^2+1}-n = \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1/n}{\sqrt{1+1/n^2}+1},$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1/n}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{1+1/n^2}+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

2.

i) Man bestimme den Grenzwert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k-2^k}{4^k}.$$

ii) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}x^k$$

für $|x|<1$ absolut konvergent ist, und für $|x|\geq 1$ divergent ist.

zu i) Mittel des Grenzwertes für geometrische Reihen (siehe 9.24) folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1-3/4} = 4,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Somit ist (siehe 9.25)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3^k}{4^k} - \frac{2^k}{4^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} = 4 - 2 = 2.$$

zu ii) Gemäß 12.20 bestimmen wir zunächst den Konvergenzradius dieser Potenzreihe; dazu sei $a_k = k/(k+1)$. Wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+1/k} = 1 \tag{1}$$

ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\lim_{k\to\infty} a_k}{\lim_{k\to\infty} a_{k+1}} = \frac{1}{1} = 1,$$

und somit ist der Konvergenzradius $\rho = 1$. Nach 12.19 ist die Reihe daher absolut konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$. Es bleibt zu untersuchen: $|x| = 1$. Um zu zeigen, dass die Reihe auch für $x \in \{-1, 1\}$ divergent ist, benutzen wir 9.23. Für $|x| = 1$ ist (siehe (1))

$$\lim_{k\to\infty} |a_k\, x^k| = \lim_{k\to\infty} |a_k| = 1,$$

und daher ist $a_k\, x^k$ keine Nullfolge.

3.

i) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \le -1, \\ x^2 + 6\,x + 7, & -1 < x \le 0, \\ x + 6, & x > 0. \end{cases}$$

ii) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt 0 nicht stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(1/x), & x \ne 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

zu i) Nach Beispiel 10.31 sind alle Polynome stetig. Also ist jede der Funktionen $f_1(x) = -x+1$, $f_2(x) = x^2 + 6\,x + 7$ und $f_3(x) = x + 6$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig, und es bleibt zu überprüfen, ob f an den Schnittstellen -1 und 0 stetig ist.

Da f_1 und f_2 stetig in -1 gilt (siehe 10.21, 10.26)

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} f_1(x) = \lim_{x\to -1}(-x+1) = 2,$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} f_2(x) = \lim_{x\to -1}(x^2 + 6\,x + 7) = 2.$$

Also ist f stetig in -1. Für die Stelle 0 ergibt sich

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} f_2(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 6\,x + 7) = 7,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f_3(x) = \lim_{x\to 0}(x + 6) = 6.$$

Also ist f nicht stetig in 0, und somit ist f stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

zu ii) Vergleiche Lösung der Aufgabe 5 des Tests vom 08.06.2007: Betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+\frac{1}{2})\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(0) = 1$; siehe Definition 10.26

4.

i) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x\,(\mathrm{e}^{1/x} - 1)$.

ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3.ten Grades der Funktion $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{4 - 2\,x}$ an der Stelle $x^\star = 0$.

iii) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

zu i) Es ist (siehe auch Beispiel 11.13)

$$\lim_{x\to\infty} x\,(\mathrm{e}^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}},$$

und somit können wir 11.12 anwenden. Mit $(\mathrm{e}^{1/x})' = -\mathrm{e}^{1/x}/x^2$ und $(1/x)' = -1/x^2$ folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Hierbei hat man (eigentlich) im letzten Schritt noch die Stetigkeit von e^x ausgenutzt (siehe 10.29).

zu ii) Es sind also zunächst zu berechnen $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (4 - 2\,x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 2, \\ f'(x) &= -(4 - 2\,x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = -1/2, \\ f^{('')}(x) &= -(4 - 2\,x)^{-3/2} \Rightarrow f^{('')}(0) = -1/8, \\ f^{(3)}(x) &= -3\,(4 - 2\,x)^{-5/2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = -3/32. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich gemäß 12.1:

$$T_3(x) = 2 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{16}\,x^2 - \frac{1}{64}\,x^3.$$

zu iii) Ist $x = y$, dann ist die Aussage sicherlich richtig. Sei also $x < y$. Wegen $(\sin x)' = \cos x$ folgt aus dem Mittelwertsatz 11.28, dass es ein $x^\star \in [x, y]$ gibt, so dass

$$\cos(x^\star) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y},$$

und daher

$$|\sin x - \sin y| = |\cos(x^\star)\,(x - y)| = |\cos(x^\star)|\,|x - y| \leq |x - y|.$$

5. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2\,x}$.

i) Man bestimme die Extrema der Funktion f.

ii) Man bestimme die Wendepunkte der Funktion f.

iii) Man skizziere den Graphen der Funktion.

zu i) Es ist $f'(x) = \mathrm{e}^{-2\,x} + x\,(\mathrm{e}^{-2\,x}\,(-2)) = (1 - 2\,x)\mathrm{e}^{-2\,x}$, und da $\mathrm{e}^{-2\,x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\,x)\mathrm{e}^{-2\,x} = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\,x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Weiterhin ist

$$f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2\,x} + (1 - 2\,x)(\mathrm{e}^{-2\,x}\,(-2)) = (4\,x - 4)\,\mathrm{e}^{-2\,x}. \tag{2}$$

Somit ist $f''(1/2) < 0$, und damit hat f an der Stelle $1/2$ ein Maximum (siehe 11.18 ii)). Gemäß 11.18 i) muß nur noch der Randpunkt 0 untersucht werden. Wegen $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist, hat f in 0 ein globales Minimum.

zu ii) Aus (2) folgt

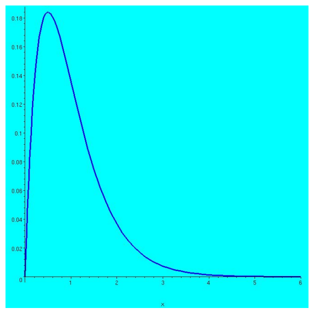
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (4\,x - 4)\,\mathrm{e}^{-2\,x} = 0 \Leftrightarrow (4\,x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Weiterhin ist

$$f'''(x) = 4\,\mathrm{e}^{-2\,x} - (8\,x - 8)\,\mathrm{e}^{-2\,x},$$

und $f'''(1) = 4\,\mathrm{e}^{-2} \neq 0$. Also ist nach 11.21 der Punkt 1 der einzige Wendepunkt.

zu iii)



6.

i) Berechnen Sie (etwa mit partieller Integration)

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

ii) Bestimmen Sie mittels der Substitution $t = \mathrm{e}^{4\,x}$ eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{4\,x}}{\mathrm{e}^{4\,x} + 1}.$$

zu i) Mit $v(x) = \ln(x)$ und $u'(x) = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$ ist $v'(x) = 1/x$ und $u(x) = 2\,x^{1/2}$. Mittels partieller Integration (13.29) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}^2} v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}\,x = v(x)\,u(x)\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} v'(x)\,u(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \ln(x)\,2\,x^{1/2}\Big|_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} x^{-1}\,2\,x^{1/2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= 4\mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}^2} 2\,x^{-1/2}\,\mathrm{d}\,x = 4\mathrm{e} - 4\,x^{1/2}\Big|_1^{\mathrm{e}^2} \\
&= 4\mathrm{e} - (4\mathrm{e} - 4) = 4.
\end{aligned}$$

zu ii) Mit $t = \mathrm{e}^{4\,x}$ ist

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (\mathrm{e}^{4\,x})' = 4\,\mathrm{e}^{4\,x} = 4\,t, \text{ bzw. } \mathrm{d}x = \frac{1}{4\,t}\mathrm{d}t.$$

Damit folgt (siehe auch 13.24)

$$\int \frac{\mathrm{e}^{4\,x}}{\mathrm{e}^{4\,x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t+1}\frac{1}{4\,t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln(|t+1|)$$
$$= \frac{1}{4}\ln(|\mathrm{e}^{4\,x}+1|) = \frac{1}{4}\ln(\mathrm{e}^{4\,x}+1),$$

was auch aus (13.27) ersichtlich ist.