Universität Magdeburg 08.06.2007

Test: Mathematik für Informatiker II

Name:	**Mat.Nr.:**
Übungsgruppe:	
Erreichte Punktezahl:	**Bonuspunkte:**

Für eine *wahre* Aussage tragen Sie bitte ein **w** in das Kästchen ein; für eine *falsche Aussage* ein **f**. Sollten Sie die Antwort nicht wissen, dann können Sie das Kästchen auch leer lassen.

1. **Gruppen, Ringe, Körper**

f $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist Gruppe.
$0 \in \mathbb{Q}$ hat kein multiplikativ Inverses

f Die Gruppe der 3-elementigen Permutation $(S_3, \circ)$ ist zyklisch.
alle Elemente haben Ordnung ≤ 3

w $\phi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit $\phi(x) = 2^x$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
$\phi(z_1 + z_2) = 2^{z_1+z_2} = 2^{z_1} \cdot 2^{z_2} = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2)$*; siehe Definition 8.11.*

w Es gibt unendlich viele positive Lösungen x des Systems von Kongruenzen: $x \equiv 2 \mod 3$, $x \equiv -5 \mod 8$ und $x \equiv 1 \mod 25$.
siehe Satz 8.29

2. **Folgen**

w Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen, dann ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge.
siehe Satz 9.15

f Ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, dann sind auch die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent.
betrachte $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n \Rightarrow a_n \cdot b_n = 1$, also konvergent, aber $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht konvergent

f Die Folge $(a^{-n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergent.
betrachte $a = \frac{1}{2} \Rightarrow (a^{-n})_{n\in\mathbb{N}_0} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht konvergent

w $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

3. **Reihen**

f Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, und es sei $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann ist die Reihe konvergent.
vgl. harmonische Reihe; Beispiel 9.22

$\boxed{\text{w}}$ Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und es sei $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{1}{2}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Reihe $a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
induktiv zeigt man, dass $a_k \leq \frac{a_0}{2^k}$, $k \geq 0$:
$k = 0$ ✓
$k \to k+1$: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a_{k+1} \leq a_k \cdot \frac{1}{2} \overset{I.V.}{\leq} \frac{a_0}{2^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_0}{2^{k+1}}$

$\boxed{\text{w}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2}$ ist konvergent.
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$*; siehe Satz 9.30*

$\boxed{\text{f}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2\,k)}$ ist konvergent.
$\ln(2\,k) \leq k \ \forall k \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln(2\,k)} \geq \frac{1}{k} \ \forall k \geq 1$*; siehe Satz 9.32 ii)*

4. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit**

$\boxed{\text{w}}$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sind f, g stetig, und ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist auch $f/g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
siehe Satz 10.30

$\boxed{\text{w}}$ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Dann existiert ein $x^\star \in [a, b]$ mit $f(x^\star) = 0$.
wegen $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ ist einer der beiden Werte kleiner oder gleich 0, der andere größer oder gleich 0; siehe Satz 10.32

$\boxed{\text{w}}$ 1/3 ist die Ableitung der Umkehrfunktion von $e^{3\,x}$ an der Stelle 1.
die Umkehrfunktion ist $\frac{1}{3} \cdot ln(x)$; deren Ableitung ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$

$\boxed{\text{w}}$ $\lim_{x \to 0} \sin(x)/\sqrt{x} = 0$.
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \overset{11.12}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \cdot \lim_{x \to 0} \cos(x) \cdot \sqrt{x} = 0$

5. **Aufgabe** Man zeige:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, ist nicht stetig in 0.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, ist differenzierbar und man berechne die Ableitung.

a) *Betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin((2n + \frac{1}{2})\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(0)$; siehe Definition 10.26*

b) • *f ist differenzierbar für $x \neq 0$ (siehe Satz 11.6) und die Ableitung für $x \neq 0$ ist*

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- *für* $x = 0$ *ist*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen $|\sin(1/x)| \leq 1$ *ist* $|x \sin(1/x)| \leq |x|$ *für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *und daher ist*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

also $f'(0) = 0$. *Die Ableitung lautet somit:*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$