Fakultät für Mathematik
Institute IAG und IMO
Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. M. Höding

# Abschlußklausur zur Mathematik II
## Fachrichtungen: IF, CV, CSE und WIF
## 21.07.2008

**Bitte in Druckschrift ausfüllen!**

| Name | Vorname | Fachrichtung | Matrikelnummer |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Anzahl der abgegebenen Seiten:**

**Punktebewertung**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | 27 | 25 | 28 | 80 |
| erreichte Punkte | | | | |

**Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!**
**Beginnen Sie bei jeder Aufgabe mit einem neuen Blatt!**
**Nummerieren Sie die Blätter durch!**

1. Die algebraische Struktur $(M, \cdot)$ ist durch die Menge $M$ der regulären Matrizen vom Format 2x2 mit Einträgen aus dem Körper der komplexen Zahlen und der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation gegeben. Die Teilmenge $M^* \subset M$ enthält die Elemente

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad M_7 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad M_8 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

mit der unvollständigen Multiplikationstabelle:

| $\cdot$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ | $M_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ | $M_8$ |
| $M_2$ | $M_2$ | $M_1$ | $M_4$ | $M_3$ | $M_6$ | $M_5$ | $M_8$ | $M_7$ |
| $M_3$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_2$ | $M_1$ | $M_7$ | $M_8$ | $M_6$ | $M_5$ |
| $M_4$ | $M_4$ | $M_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_8$ | $M_7$ | $M_5$ | $M_6$ |
| $M_5$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_8$ | $M_7$ | $M_2$ | $M_1$ | $M_3$ | $M_4$ |
| $M_6$ | $M_6$ | $M_5$ | $M_7$ | $M_8$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_4$ | $M_3$ |
| $M_7$ | $M_7$ | $M_8$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_4$ | $M_3$ | . | . |
| $M_8$ | $M_8$ | $M_7$ | $M_6$ | $M_5$ | $M_3$ | $M_4$ | . | . |

(a) Vervollständigen Sie die Verknüpfungstabelle und weisen Sie die Gruppeneigenschaften der algebraischen Struktur $G = (M^*, \cdot)$ nach. Auf den Nachweis der Assoziativität kann ohne Punktverlust verzichtet werden.

(b) Zeigen Sie, daß die Matrizen $M_3$ und $M_5$ ein minimales Erzeugendensystem von $G$ bilden.

(c) Ist $(M^*, \cdot)$ kommutativ? Ist die Gruppe zyklisch?

(d) Weisen Sie nach, daß $N = (\{M_1, M_2, M_5, M_6\}, \cdot)$ Normalteiler in $G$ ist und beschreiben Sie die Faktorgruppe von $G$ bezüglich des Normalteilers $N$.

(e) Ist der Normalteiler $(\{M_1, M_2, M_5, M_6\}, \cdot)$ isomorph zur Gruppe $(\{e, a, b, c\}, \star)$ mit folgender Verknüpfungstabelle?

| $\star$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot e^{\alpha x}$.

   (a) Man bestimme $\alpha$ so, daß die Funktion $f(x)$ in $x = -\frac{1}{2}$ ein relatives Minimum hat.

   (b) Sei $\alpha = 3$. Man zeige, daß $f^{(n)}(x) = 3^{n-1} \cdot e^{3x} \cdot (n + 3x)$ gilt.

   (c) Sei $\alpha = 3$. Man bestimme für $f(x)$ das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ und gebe die Taylorreihe an.

   (d) Zu berechnen sind die Integrale $\int\limits_0^1 x \cdot e^{3x} dx$ und $\int\limits_1^\infty e^{-3x} dx$.

3. Wahr oder Falsch? Begründen Sie sorgfältig Ihre Antwort!

   (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Formel

   $$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{5}{x})^{5x} = e^5$.

   (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{|x|}$ ist in $x = 0$ differenzierbar.

   (d) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{10^k (k+1)}$ ist für alle $x$ mit $-10 \leq x < 10$ konvergent.

   (e) Im Vektorraum $\mathbb{F}$ aller in $[-\pi, +\pi]$ integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Skalarprodukt $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \; dx$ sind die Funktionen $f(x) = 20$ und $g(x) = \sin(10x)$ linear unabhängig.