Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Willems, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik II (MP MAII)

oder zum

unbenoteten Leistungsnachweis (LN MAII)

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
SS 2011
13.07.2011

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer	MP MAII/LN MAII

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
max. Punkte	9	8	8	9	9	7
Punkte						

Gesamtpunktzahl der Klausur =	Note

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Matrix $A \in (\mathbb{R})_3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

   (b) Geben Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

   (c) Berechnen Sie e^A und $\det(e^A)$.

2. Gegeben sei die Matrix $A \in (\mathbb{R})_{3,2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie eine Matrix Q, deren Spalten orthonormal zueinander sind und die den gleichen Vektorraum erzeugen wie die Spalten von A. (Hinweis: orthonormieren Sie die Spaltenvektoren von A nach Schmidt.

   (b) Zeigen Sie, dass $Q^T Q = E \in (\mathbb{R})_2$ ist.

   (c) Geben Sie eine Matrix $R \in (\mathbb{R})_2$ an, für die $QR = A$ gilt.

3. Gegeben seien die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{1+3x}}$.

   (a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

   (b) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int\limits_0^3 g(x)dx$.

   (Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $t = \sqrt{1+3x}$.)

4. Gegeben sei die Funktion $f : R_{>0} \to R$ mit $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

   (a) Bestimmen Sie die Extremwerte von f und untersuchen Sie deren Art (Minima oder Maxima).

   (b) Untersuchen Sie $f(x)$ im Intervall $(0, e)$ auf Monotonie.

   (c) Ermitteln Sie im Falle seiner Existenz den Wert des uneigentlichen Integrals $\int\limits_1^\infty f(x)dx$.

   (Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration oder die Substitution $t = \ln x$.)

5. Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln \sqrt{1-x}$.

   (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 an der Stelle $a = 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Taylorreihe gilt: $T_\infty(x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k}$.

   (c) Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe $T_\infty(x)$.

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x) + a - \frac{\pi}{4} & \text{für } -\infty < x < 1 \\ 1 - bx^2 & \text{für } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist.