Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering, Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2012

16.07.2012

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. Sei $a_n = \frac{3n}{4n^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge.

   i) Untersuchen Sie a_n auf Monotonie und Konvergenz.

   ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n}{4n^2-1}$ konvergiert.

   iii) Konvergiert diese Reihe auch absolut? (mit Begründung)

   [Lösung]

   i) Nullfolge: Satz 11.16, da Nennergrad > Zählergrad bzw.

$$\begin{aligned} & \left|\frac{3n}{4n^2-1} - 0\right| = \frac{3n}{4n^2-1} < \frac{3n+\frac{3}{2}}{4n^2-1} = \frac{3}{4n-2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} < n \end{aligned}$$

   Monotonie:

$$\begin{aligned} & a_n \text{ monoton fallend} \\ \Leftrightarrow \quad & a_n > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{3n}{4n^2-1} > \frac{3n+3}{4n^2+8n+3} \\ \Leftrightarrow \quad & 3n(4n^2+8n+3) > (3n+3)(4n^2-1) \\ \Leftrightarrow \quad & 12n^3+24n^2+9n > 12n^3+12n^2-3n-3 \\ \Leftrightarrow \quad & 12n^2+12n+3 > 0 \end{aligned}$$

   ii) Da a_n eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 11.30).

   iii) Die Reihe ist nicht absolut konvergent nach dem Minorantenkriterium (Satz 11.32).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^2-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

2.

   i) Bilden Sie die 1. Ableitungen folgender Funktionen:

$$\begin{aligned} & f_1 : \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad && f_1(x) = e^{x^2}\sin(\sqrt{x}), \\ & f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_2(x) = \ln\left(\frac{1+\cos^2(x)}{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

ii) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen von $g(x)$, das Verhalten von $g(x)$ für $x \to \pm\infty$ und alle lokalen Minima und Maxima von $g(x)$.

[Lösung]

zu i)

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \left(2xe^{x^2}\ \sin(\sqrt{x}) + e^{x^2}\cos(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= e^{x^2}\left(2x\ \sin(\sqrt{x}) + \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right), \\
&\quad \text{(Produktregel, Kettenregel)} \\
f_2'(x) &= \frac{(x^2+1)}{(1+\cos^2(x))} \cdot \frac{(-2\cos(x)\sin(x)(x^2+1) - 2x(1+\cos^2(x)))}{(x^2+1)^2} \\
&= -\frac{2\cos(x)\sin(x)(x^2+1) + 2x(1+\cos^2(x))}{(1+\cos^2(x))(x^2+1)}. \\
&\quad \text{(Kettenregel,Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

zu ii)

Nullstellen: $x = 0$.
Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$ (l'Hopital, Satz 11.12, oder mit $1/x^2$ erweitern).
Extremwerte: $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $g''(x) = \frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. $g''(-1) > 0 \to$ lok. Minimum, $g''(1) < 0 \to$ lok. Maximum.

3. i) Berechnen Sie mithilfe der partiellen Integration das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

ii) Berechnen Sie mithilfe der Substitution $t = 1 + x^2$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

[Lösung]
zu i):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx &= [-x \cdot e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + 0 + [-e^{-x}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \tfrac{2}{e}\end{aligned}$$

zu ii): $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

Mit der Substitution $t = 1+x^2$ folgt $dt = 2x\,dx$. Also $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}t^{-1}+c = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}+c$. Somit $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim\limits_{b\to\infty} [-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(1+b^2)^{-1} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

4. Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$.

   i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x^* = 0$.

   ii) Beweisen Sie, dass die Potenzreihe $T_\infty(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle $x^* = 0$ ist.

   iii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert.

[Lösung]
zu i):

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln \tfrac{1}{1-x} = \ln(1-x)^{-1} = -\ln(1-x), f(0) = 0 \\ f'(x) &= -\tfrac{(-1)}{1-x} = \tfrac{1}{1-x}, f'(0) = 1 \\ f''(x) &= \tfrac{1}{(1-x)^2}, f''(0) = 1 \\ T_2(x) &= 0 + 1 \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot x^2 = x + \tfrac{x^2}{2}\end{aligned}$$

zu ii): k-te Ableitung von f: $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}$
Induktionsanfang ($k = 1$): $f'(x) = \frac{0!}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ (w. A.)
Induktionsschluss: $(f^{(k)}(x))' = \frac{k(k-1)!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = f^{(k+1)}(x)$
Einsetzen in Taylorformel: $T_\infty(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!(1-0)^{k+1}} x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$

zu iii): $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 4x + 4xy$. Bestimmen Sie

   i) den Gradienten von f im Punkt $(1, 1)$,

ii) die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen der Gradient der Nullvektor wird,

iii) die lokalen Extremwerte von f und charakterisieren Sie deren Art.

[Lösung]
zu i):

$$\begin{array}{ll} f_x = 8x - 4 + 4y, & f_x(1,1) = 8 \\ f_y = 4y + 4x, & f_y(1,1) = 8 \end{array} \quad \text{also } \operatorname{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

zu ii):

$$\begin{array}{llll} 8x - 4 + 4y = 0 & \mid \cdot(-1) & -4x + 4 = 0 \Rightarrow & x = 1 \\ 4x \qquad + 4y = 0 & \hookleftarrow^{+} & & y = -1 \end{array}$$

zu iii): $f_{xx} = 8, f_{yy} = 4, f_{xy} = f_{yx} = 4$

Hessematrix $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(H_f - \lambda E) = (8 - \lambda)(4 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 16 = 0$
$\Rightarrow$ beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{20}$ sind größer Null
(oder $\det H_{11} = 8 > 0$ und $\det H_{22} = \det \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = 16 > 0$) $\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ in $P(1, -1)$ hat f lokales Minimum.

6. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, sei

$$T_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le \alpha^{-1}, 0 \le x_2 \le \alpha - \alpha^2 x_1\}.$$

i) Skizzieren Sie T_α.

ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}(T_\alpha)$.

iii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = 2\,x_1\,x_2$. Berechnen Sie für $\alpha = 1$ das Integral $\int_{T_1} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.

[Lösung]

zu ii) $\operatorname{vol}(T_\alpha) = \frac{1}{2}$, denn
Elementare Geometrie: T_α ist ein Dreieck mit den Ecken $(0,0)^\intercal, (\alpha^{-1}, 0)^\intercal, (0, \alpha)^\intercal$.
Somit ist

$$\operatorname{vol}(T_\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^{-1}\,\alpha = \frac{1}{2}.$$

Oder integrieren: Gemäß Definition 18.8 und Satz 18.13 lässt sich das

Volumen berechnen als

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol} T_\alpha &= \int_0^{\alpha^{-1}} \left(\int_0^{\alpha-\alpha^2 x_1} 1 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^{\alpha^{-1}} \left(\alpha - \alpha^2 x_1\right) \mathrm{d}x_1 = \alpha \int_0^{\alpha^{-1}} (1 - \alpha\, x_1) \, \mathrm{d}x_1 \\
&= \alpha \left(x_1 - \frac{1}{2} \alpha\, x_1^2 \right) \Big|_0^{\alpha^{-1}} = \alpha \, \frac{1}{2} \alpha^{-1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

zu iii) Gemäß Satz 18.13 ist

$$\begin{aligned}
\int_{T_1} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} 2\, x_1\, x_2 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 \left(x_1\, x_2^2 \Big|_0^{1-x_1} \right) \mathrm{d}x_1 = \int_0^1 \left(x_1 \,(1 - x_1)^2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 \left(x_1 - 2\, x_1^2 + x_1^3 \right) \mathrm{d}x_1 = \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{2}{3} x_1^3 + \frac{1}{4} x_1^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$