Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2014

09.07.2014

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. Die Menge G der invertierbaren (2×2)-Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ ist eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation.

   i) Bestimmen Sie die Ordnung der Matrix $\begin{pmatrix} [0]_3 & [1]_3 \\ [2]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}$.

   ii) Beweisen Sie, dass die Menge
   $$U = \{A \in G : \det(A) = [1]_3\}$$
   eine Untergruppe von G ist.

   iii) Untersuchen Sie, ob die Matrizen
   $$A = \begin{pmatrix} [1]_3 & [2]_3 \\ [1]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} [0]_3 & [2]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 \end{pmatrix}$$
   in der gleichen Nebenklasse bzgl. U liegen.

[Lösung]

i) $\begin{pmatrix} [0]_3 & [1]_3 \\ [2]_3 & [2]_3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} [1]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}$, also ist die Ordnung 3.

ii) Offensichtlich ist U nicht leer. G besteht aus Matrizen mit Determinante ungleich $[0]_3$, also ist U eine Teilmenge von G. Seien $A, B \in U$. Dann gilt
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = [1]_3 \cdot [1]_3 = [1]_3,$$
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = ([1]_3)^{-1} = [1]_3.$$
Daher liegen $A \cdot B$ sowie A^{-1} wieder in U. Nach dem Untergruppenkriterium ist U eine Untergruppe von G.

iii) A und B liegen in derselben Nebenklasse bzgl. U, wenn $B^{-1} \cdot A \in U$ bzw. $\det(B^{-1} \cdot A) = [1]_3$. A und B müssen also dieselbe Determinante haben. Da $\det(A) = [2]_3 = \det(B)$ liegen A und B in der gleichen Nebenklasse.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2 - x}{\ln x}$.

   i) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

   ii) Bilden Sie die 1. Ableitung von f an der Stelle $x^* = \mathrm{e}$.

   iii) Zeigen Sie $f' + (\frac{1}{f})' \cdot f^2 = 0$.

[Lösung]

zu i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\ln x}$ ist ein unbestimmter Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$“. Nach l'Hospital gilt: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-1}{\frac{1}{x}} = \frac{2-1}{1} = 1.$

zu ii) Nach Quotientenregel gilt: $f'(x) = \frac{(2x-1)\ln x - (x^2-x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{(2x-1)\ln x-(x-1)}{\ln^2 x}$
$\Rightarrow f'(e) = \frac{(2e-1)\cdot 1-(e-1)}{1^2} = e.$

zu iii) $f' + (\frac{1}{f})' \cdot f^2 = f' + (-\frac{1}{f^2}) \cdot f' \cdot f^2 = f' - f' = 0$ oder Berechnung von $(\frac{1}{f})' = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x^2-x)-(2x-1)\ln x}{(x^2-x)^2}$ und Einsetzen in die Gleichung.

3.

i) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,\mathrm{d}x.$$

ii) Berechnen Sie, z.B. mithilfe der partiellen Integration, das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

[Lösung]

zu i) Gemäß der Substitutionsregel 15.21 mit $f(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = x^4+3$, $g'(x) = 4\,x^3$ ist $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} + c = \sqrt{x^4+3} + c$. Somit $\int\limits_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx = \left[\ \sqrt{x^4+3}\ \right]_0^1 = \sqrt{1+3} - \sqrt{0+3} = 2 - \sqrt{3}.$

zu ii) $\int\limits_0^\infty (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx$
Mithilfe der partiellen Integration $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$ wobei $u' = \mathrm{e}^{-x}$ mit $u = -\mathrm{e}^{-x}$ und $v = (x+1)$ mit $v' = 1$ folgt:
$\int (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx = -\mathrm{e}^{-x}\cdot(x+1) - \int(-\mathrm{e}^{-x})\,dx = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + c$
Also gilt: $\int\limits_0^\infty (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\ -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^b$
$= \lim\limits_{b\to\infty} -(b+1)\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} - (-\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0) = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{b+1}{\mathrm{e}^b} - \frac{1}{\mathrm{e}^b} + 2 = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{\mathrm{e}^b}$ (l'Hospital) $- 0 + 2 = -0 - 0 + 2 = 2$

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}$.

   i) Ermitteln Sie eine Näherung für $f(0) = \sqrt[3]{\mathrm{e}}$ mithilfe des Taylorpolynoms $T_2(0)$ an der Stelle $x^* = -1$.

   ii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $T_\infty(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k!}(x+1)^k$ die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle $x^* = -1$ ist.

   iii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k\, k!}(x+1)^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

[Lösung]

zu i) Zuerst bestimmen wir das Taylorpolynom $T_2(x)$.

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}, & f(-1) & = & 1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}, & f'(-1) & = & \frac{1}{3} \\ f''(x) & = & \frac{1}{9}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}, & f''(-1) & = & \frac{1}{9} \end{array}$$

$T_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{9\cdot 2}(x+1)^2 = 1 + \frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{18}(x+1)^2$

Wegen $f(0) = \sqrt[3]{e} \approx T_2(0)$ gilt, $\sqrt[3]{e} \approx T_2(0) = 1 + \frac{1}{3}(0+1) + \frac{1}{18}(0+1)^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{25}{18}$.

zu ii) k-te Ableitung von f: $f^{(k)}(x) = \frac{1}{3^k}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}$

Induktionsanfang ($k=0$): $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}} = \frac{1}{3^0}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}}$ (w. A.)

Induktionsschluss: $(f^{(k)}(x))' = \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}} = \frac{1}{3^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1+x}{3}} = f^{(k+1)}(x)$

Einsetzen in Taylorformel: $T_\infty(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k\cdot k!}(x+1)^k$

zu iii) $\rho = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3^k\cdot k!}}{\frac{1}{3^{k+1}\cdot(k+1)!}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{3^{k+1}\cdot(k+1)!}{3^k\cdot k!}\right|$

$= \lim\limits_{k\to\infty} 3\cdot(k+1) = \infty$

5. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{12}x_2^3$.

   i) Berechnen Sie den Gradienten von f.

   ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ nur an den Stellen $(0,0)$ und $(1,2)$.

   iii) Bestimmen Sie die Art des lokalen Extremwertes $\mathbf{x}^* = (1,2)$ von f.

[Lösung]

zu i) $\begin{array}{rcl} f_{x_1}(x_1,x_2) &=& 2x_1 - x_2, \\ f_{x_2}(x_1,x_2) &=& \frac{1}{4}x_2^2 - x_1, \end{array}$ also $\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ \frac{1}{4}x_2^2 - x_1 \end{pmatrix}$.

zu ii) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 \\ \frac{1}{4}x_2^2 - x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^2 - x_1 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \text{ oder } x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \text{ oder } x_2 = 2 \end{array}\right.$

zu ii) $f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = 2, f_{x_2x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2, f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = f_{x_2x_1}(x_1,x_2) = -1.$

Hessematrix $H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(H_f - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow$ beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-4}{4}}$ sind größer Null

(oder $\det H_{11} = 2 > 0$ und $\det H_{22} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$) $\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ in $P(1,-1)$ hat f lokales Minimum.

6. Für $\alpha \geq 0$ sei

$$P_\alpha = \{(x_1,x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, \, -\alpha \leq x_2 \leq 1 - x_1^2\}.$$

i) Skizzieren Sie den Bereich P_α.

ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\operatorname{vol}(P_\alpha)$.

iii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1\, x_2$. Berechnen Sie für $\alpha = 0$

$$\int_{P_\alpha} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x}.$$

[Lösung] zu ii) Gemäß Def. 18.8 und Satz 18.13 ist

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(P_\alpha) &= \int_{P_\alpha} 1\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\alpha}^{1-x_1^2} 1 \,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}\,x_1 \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x_2 \Big|_{-\alpha}^{1-x_1^2} \right) \mathrm{d}\,x_1 = \int_{-1}^{1} (\alpha + 1 - x_1^2)\,\mathrm{d}\,x_1 \\ &= \left((\alpha+1)\,x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 \right) \Big|_{-1}^{1} = 2(\alpha+1) - \frac{2}{3} = 2\alpha + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

zu iii) Der Bereich P_α ist symmetrisch zur x_2-Achse und die Funktion f ist ungerade in x_2. Folglich ist $\int_{P_\alpha} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$. Bzw. für $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{P_\alpha} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-x_1^2} x_1\, x_2\ \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}\,x_1 \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x_1 \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{1-x_1^2} \right) \mathrm{d}\,x_1 = \int_{-1}^{1} \left(x_1 \frac{(1-x_1^2)^2}{2} \right) \mathrm{d}\,x_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x_1 - 2x_1^3 + x_1^5 \right)\ \mathrm{d}\,x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{1}{2} x_1^4 + \frac{1}{6} x_1^6 \right) \Big|_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$