Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Gohar Kyureghyan, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2016

20.07.2016

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.	Leist.Nach.?

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
max. Punkte	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**50**	
Punkte							

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Ein A4-Blatt Formelsammlung**

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A über $\mathbb{R}$.

   (ii) Bestimmen Sie den Eigenraum zu **einem** Eigenwert von A.

2. Gegeben seien die Permutationen π_1, $\pi_2 \in S_4$ mit

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \pi_2 = (2\,4\,3).$$

   (i) Bilden Sie die Kompositionen $\pi_1 \circ \pi_2$ und $\pi_2 \circ \pi_1$.

   ii) Berechnen Sie $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}$ und π_2^{10}.

   (iii) Finden Sie eine Permutation $\sigma \in S_4$, so dass die Gleichung $\pi_2^{10} \circ \sigma = \pi_1$ gilt.

3. Gegeben seien die Funktionen $f_1 : D_{f_1} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \ln(x-2)$ und $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

   (i) Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_{f_1} und die Nullstellen der Funktion $f_1(x)$.

   (ii) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

   (iii) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}\cdot(\frac{1}{n})}$.

4. Gegeben sei die Funktionenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ und

$$f_a(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{für } x < 1 \\ \frac{ax}{(1+x^2)^2} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

i) Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f_a(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

ii) Setzen Sie $a = 1$ und ermitteln Sie eine Stammfunktion von $f_2(x)$ für $x \geq 1$ mithilfe einer Substitution.

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - xy + 2y(y - 7)$.

(i) Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

(ii) Zeigen Sie, dass $grad\, f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ im Punkt $\mathbf{x}^0 = (2, 4)$ gilt.

(iii) Geben Sie die Hesse-Matrix im Punkt $\mathbf{x}^0 = (2, 4)$ an und zeigen Sie, dass im Punkt $\mathbf{x}^0 = (2, 4)$ ein lokales Minimum vorliegt.
(Hinweis: Hilfreich könnte hier die erste Aufgabe sein!)