

Fakultät für Mathematik
 Institute IAG und IMO
 Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. M. Höding

Probeklausur zur Mathematik II (Algebra)
Fachrichtungen: IF, CV, CSE und WIF
Mai 2008



Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer

Punktebewertung

Aufgabe	1(a)	1(b)	1(c)	1(d)	1(e)	1(f)	1(g)	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)	Σ
Punkte	6	8	5	3	3	1	5	5	2	4	4	4	50
erreichte Punkte													

Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!
 und
Zeit zur Bearbeitung: 90 min !

1. Sei G_1 die von den reellen Matrizen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

mit der Matrizenmultiplikation als Operation erzeugte Gruppe $(M, \cdot)$.
 Sie hat die Elemente $M_1 = E, M_2 = A, M_3 = B, M_4 = A^2, M_5 = A^3, M_6 = AB, M_7 = BA, M_8 = BA^2$.

- (a) Ergänzen Sie die Gruppentafel

$\cdot$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
M_1	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
M_2			M_6			M_8	M_3	M_7
M_3	M_3	M_7	M_1	M_8	M_6	M_5	M_2	M_4
M_4			M_8			M_7	M_6	M_3
M_5			M_7			M_3	M_8	M_6
M_6	M_6	M_3	M_2	M_7	M_8	M_1	M_4	M_5
M_7	M_7	M_8	M_5	M_6	M_3	M_4	M_1	M_2
M_8	M_8	M_6	M_4	M_3	M_7	M_2	M_5	M_1

- (b) Weisen Sie die Gruppeneigenschaften nach. Warum gilt sofort das Assoziativgesetz?
- (c) Geben Sie eine Untergruppe $G^* = (M^*, \cdot)$ von G_1 mit 4 Elementen an (Begründung nicht vergessen!) und zeigen Sie, daß diese ein Normalteiler ist.
- (d) Überprüfen Sie die Gruppe und die Untergruppe auf Kommutativität.
- (e) Sind G_1 und G^* zyklisch?
- (f) Geben Sie ein minimales Erzeugendensystem für die Untergruppe G^* an.
- (g) Ist die Untergruppe G^* isomorph zur Gruppe $G_2 = (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}, \odot)$?

2. Betrachtet werden die Gruppen $G_1 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
- (a) Man zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(z) = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein surjektiver Homomorphismus ist.
(Hinweis: Die Verwendung der Eulersche Form der komplexen Zahlen erleichtert die Beweisführung.)
 - (b) Welche Kongruenzrelation wird durch den surjektiven Homomorphismus in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ induziert?
 - (c) Man bestimme den Kern der Abbildung und beschreibe allgemein die Kongruenzklassen.
 - (d) Man beschreibe die entstehende Faktorgruppe und deute die Elemente der Trägermenge der Faktorgruppe G_1/K und deren Verknüpfung geometrisch.
 - (e) Der Homomorphiesatz sagt aus, daß die Faktorgruppe G_1/K isomorph zu $G_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist. Welche bijektive Abbildung gehört zu dieser Isomorphie? (Begründung!)