Fakultät für Mathematik
Institute IAG und IMO
Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. M. Höding

Vordiplomklausur Mathematik III
Fachrichtungen: Informatik und Ingenieur-Informatik
30.01.2007

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer	1.Wiederholung
				ja/nein

Punktebewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	11	12	11	12	12	12	70
erreichte Punkte							

Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!

1. Zeigen Sie, daß die Funktionen $y_1 = e^{3x}$ und $y_2 = xe^{3x}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = 0$ sind und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' - 6y' + 9y = x^2$.

2. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

   (a) Setzen Sie $a = 1$ und berechnen Sie das vollständige Differential von f an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$.

   (b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die relativen Extrema und die Sattelpunkte der Funktionen für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. In einem Unternehmen erweisen sich bei der Produktion eines bestimmten elektronischen Bauteils $\frac{1}{3}$ der Bauteile als Ausschuß.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter drei zufällig ausgewählten Bauteilen genau k, $k = 0, 1, 2, 3$, Ausschuß sind?

   (b) Die diskrete Zufallsgröße X sei die Anzahl an Ausschußbauteilen unter den drei ausgewählten Bauteilen. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X und skizzieren Sie diese.

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den drei gezogenen Bauteilen
   (i) mehr als eins Ausschuß sind,
   (ii) weniger als eins Ausschuß ist?

   (d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

4. Gegeben ist die folgende Funktion $f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 8xe^{-4x^2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} .$$

   (a) Zeigen Sie, daß $f(x)$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.

   (b) Welche Verteilungsfunktion $F(x)$ hat die stetige Zufallsgröße X?

   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X \leq 1)$ und $P(X > 2)$.

5. Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcrrrcl} z & = & -5x_1 & +x_2 & -x_3 & = & \max! \\ & & 2x_1 & -4x_2 & +5x_3 & \leq & 4 \\ & & -4x_1 & +ax_2 & -x_3 & = & 6 \\ & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

(a) Setzen Sie $a = 1$ und bestimmen Sie die optimale Lösungsmenge des Problems mit Hilfe der Simplexmethode.

(b) Geben Sie einen Wert von a so an, daß der Lösungsbereich des linearen Optimierungsproblems leer ist.

6. Bestimmen Sie das duale Problem zu folgendem primalen linearen Optimierungsproblem für den Fall $a = b = 4$ und lösen Sie sowohl das primale und auch das duale Problem mit Hilfe geometrischer Überlegungen:

$$\begin{array}{rcrrrrcl} z & = & 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & \max! \\ & & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & a \\ & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & b \\ & & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Ändern Sie die Werte von a und b so ab, daß die Zielfunktion des dualen Problems unbeschränkt wird. Welche Schlußfolgerung ergibt sich in diesem Fall für das primale Problem?