

TEST: MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER III

Name:

Mat.Nr.:

Übungsgruppe:

Erreichte Punktezahl:

Bonuspunkte:

Im SS 2008 werde ich Mathe IV für CV WIF besuchen!

Für eine *wahre* Aussage tragen Sie bitte ein **w** in das Kästchen ein; für eine *falsche* Aussage ein **f**. Sollten Sie die Antwort nicht wissen, dann können Sie das Kästchen auch leer lassen.

1. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

- w** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, existieren und stetig sind.

Nach Definition 15.16.

- w** Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^2 + x \sin y$. Dann besitzt f im Punkt $(-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{2})$ ein lokales Minimum.

Es ist $\text{grad}f(x, y) = (6x + \sin y, x \cos y)$ und $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$.

Daher gilt $\text{grad}f(-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{2}) = (0, 0)$ und $H_f(-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ist positiv definit. Nach Satz 15.34 folgt, dass $(-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{2})$ ein lokales Minimum von f ist.

- f** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann besitzt f in $x^* \in D$ genau dann ein lokales Extremum, wenn $\text{grad}f(x^*) = \mathbf{0}$.

Hier gilt nur eine Implikationsrichtung, siehe Satz 15.32.

- w** Sei $f(x, y) = (2 \ln y, 4y^3 + \sin(x))$. Die Jacobi-Determinante von f im Punkt $(2\pi, 1)$ hat den Wert -2 .

Es ist $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(x) \\ \frac{2}{y} & 12y^2 \end{pmatrix}$ und damit $\det J_f(2\pi, 1) = \det \begin{pmatrix} 0 & \cos(2\pi) \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = -2$.

2. Integralrechnung im \mathbb{R}^n

f Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2\}$. Das Volumen (der Flächeninhalt) von D beträgt 1.

Nach Definition 16.8 ist

$$\text{vol}(D) = \int_D 1 \, d(x, y) = \int_0^1 \int_{-x}^{x^2} dy \, dx = \int_0^1 (x^2 + x) \, dx = \left. \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right|_0^1 = \frac{5}{6} \neq 1.$$

f Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$. Es gilt: $\int_D x \, d(x, y) = 12$.

Es ist

$$\int_D x \, d(x, y) = \int_0^3 \int_1^3 x \, dy \, dx = \int_0^3 xy \Big|_1^3 dx = \int_0^3 2x \, dx = x^2 \Big|_0^3 = 9$$

f Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy.$$

Siehe Satz 16.10.

w Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis im \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$\int_D x^2 y \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, dr.$$

Wir betrachten die Transformation $T : [0, 1] \times [0, 2\pi) \rightarrow D$ mit $T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. T ist bijektiv, mit

$$|\det J_T(r, \varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| = r,$$

und sowohl T als auch T^{-1} sind stetig partiell differenzierbar.

Anwenden der Transformationsformel (Satz 16.17) liefert die Behauptung.

3. Lineare Optimierung

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

f $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist Ecke von P .

Im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ wird in keiner der P definierenden Ungleichungen Gleichheit angenommen und somit liegt nach Definition 17.11 keine Ecke von P vor.

w 1 ist der Optimalwert von $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Wir lösen das Problem mit dem Simplexalgorithmus. Da $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ und das Problem in Standardform gegeben ist, kann als Startecke $\mathbf{0}$ gewählt werden und wir erhalten als Starttableau

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Es sind also nach einem Pivotschritt alle relativen Kosten ≤ 0 und somit ist der Optimalwert tatsächlich 1.

f $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ ist Optimallösung von $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Der Punkt ist keine Optimallösung, da er wegen $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}) \not\geq \mathbf{0}$ noch nicht einmal in P liegt.

w Im folgenden Simplextableau ist das markierte Element ein zulässiges Pivotelement:

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Siehe Auswahl der Pivotelemente in Bemerkung 17.27.

4. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

w Beim Würfelspiel mit 3 Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 6 zu würfeln genau so wahrscheinlich wie die Augensumme 15.

Entweder man überprüft, dass es für das Zustandekommen vom 6 und 15 die gleiche Anzahl (nämlich 9) Möglichkeiten gibt, oder man überlegt sich etwas allgemeiner, dass die Abbildung $(aw_1, aw_2, aw_3) \mapsto (7 - aw_1, 7 - aw_2, 7 - aw_3)$ eine Bijektion zwischen diesen Möglichkeiten darstellt.

- f** Von 10 Computern eines Computerraumes seien 4 defekt. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von zwei zufällig überprüften Computern defekt ist, beträgt $\frac{16}{25}$.

Sei $X =$ Anzahl defekter Computer bei Auswahl von Zweien. Nach dem Prinzip Ziehen ohne Zurücklegen gilt dann: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{3} \neq \frac{16}{25}$.

- w** Ein fairer Würfel wird geworfen. Sei $X =$ Anzahl der Würfe, bis zum ersten Mal die Augenzahl 1 geworfen wird. Dann ist $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$.

Wenn im k -ten Wurf zum ersten Mal die Augenzahl 1 geworfen wird, dann muss in den vorhergehenden $k - 1$ Würfeln stets eine Augenzahl $\neq 1$ geworfen worden sein. Da nun, das aufeinanderfolgende Werfen eines Würfels unabhängige Ereignisse liefert, erhält man die angegebene Formel durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten.

- f** Für eine Zufallsgröße X gilt: $E(X^2) = (E(X))^2$?

Sei z.B. $X =$ Anzahl der Köpfe bei einmaligem Münzwurf. Dann gilt $X = X^2$ und $E(X) = \frac{1}{2}$ und daher $\frac{1}{2} = E(X^2) = E(X) \neq (E(X))^2 = \frac{1}{4}$.

5. Aufgabe

- a) Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Man zeige: $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$.

Es ist

$$P(A|B) + P(\bar{A}|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Der 2.te Schritt folgt hierbei aus der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse $A \cap B$ und $\bar{A} \cap B$.

- b) Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es eine Aufgabe mit 4 möglichen Antworten, nur eine ist richtig und es darf auch nur eine Antwort angekreuzt werden. Gut vorbereitete Studierende kreuzen (natürlich) die richtige Antwort an, schlecht vorbereitete Studierende machen zufällig ihr Kreuz. 80% der Studierenden sind schlecht vorbereitet. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein richtiges Kreuz (also Aufgabe richtig gelöst) von einem gut vorbereiteten Studierenden stammt.

Sei K_r das Ereignis "Kreuz richtig", S_s das Ereignis "Studierender schlecht vorbereitet" und S_g das Ereignis "Studierender gut vorbereitet". Gesucht ist $P(S_g|K_r)$. Wir kennen $P(K_r|S_g) = 1$ und $P(K_r|S_s) = 1/4$, sowie $P(S_s) = 0.8$ und $P(S_g) = 0.2$. Nach Satz 18.14 erhalten wir:

$$P(S_g|K_r) = \frac{P(S_g) P(K_r|S_g)}{P(S_g) P(K_r|S_g) + P(S_s) P(K_r|S_s)} = \frac{0.2}{0.2 + 0.8 \cdot 0.25} = \frac{1}{2}.$$