1. Differentialrechnung I

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\binom{x}{y} = 3\,x\,y - x^3 - y^3$.

i) Man bestimme Gradienten $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$ und Hesse-Matrix $H_f\binom{x}{y}$ von f.

ii) Man bestimme alle lokalen und globalen Extrema von f.

2. Differentialrechnung II

Für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g\binom{x}{y} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, und es sei $M(a,b) = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : g\binom{x}{y} = 0\}$.

i) Skizzieren Sie die Menge $M(a,b)$.

ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\binom{x}{y} = x\,y$.

a) Bestimmen Sie die Gradienten von f und g.

b) Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f\binom{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $(x,y)^\intercal \in M(a,b)$.

3. Integralrechnung

Sei $D = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : x\,y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

i) Beschreiben Sie D in Polarkoordinaten.

ii) Bestimmen Sie das Integral $\int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{dx}$.

iii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $t = \binom{1}{1}$. Bestimmen Sie $\operatorname{vol}(A\,D + t)$.

4. Lineare Optimierung

i) Eine Firma hat zwei Produktionsstätten P_1 und P_2 mit einer Produktionskapazität von $1,6$ und $0,8$ Tonnen pro Tag. Sie verteilt ihr Produkt an drei Kunden K_1, K_2 und K_3 mit jeweiligem Tagesbedarf von $0,9$ t/Tag, $0,7$ t/Tag und $0,3$ t/Tag. Die Kosten in EUR/t für den Transport von den Produktionsstätten zu den einzelnen Kunden sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	K1	K2	K3
P1	25	60	75
P2	20	50	85

Für die Produktion selbst fallen in P_1 Kosten in Höhe von 30 EUR/t an, falls weniger als $0,3$ t/Tag produziert werden und 40 EUR/t bei höherer Produktionsmenge. Die Produktionskosten in P_2 sind unabhängig vom Produktionsvolumen und belaufen sich auf 35 EUR/t.
Modellieren Sie das Problem, den Bedarf der Kunden an einem Tag zu decken, wobei die Gesamtkosten für die Firma minimiert werden sollen.

ii) Lösen Sie folgendes LOP mit der Simplexmethode:

$$\begin{aligned}
\max\{x_1 + 2x_2 - x_3 : \quad 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 8, \\
2x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 12, \\
3x_1 + x_2 &\leq 18, \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0\}.
\end{aligned}$$

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung I

In einer Team-Quiz-Show im Fernsehen wird jedem Mitglied eine Frage gestellt. Das Team gewinnt, wenn höchstens ein Mitglied eine Frage falsch beantwortet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die richtige Antwort gibt, ist $0,1$.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus drei Mitgliedern bestehendes Team gewinnt? Benennen Sie die Verteilung und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der zugehörigen Zufallsvariablen.

ii) Ermitteln Sie Erwartungswert und Varianz, wenn jedes Team aus 100 Mitgliedern besteht. Benutzen Sie die Ungleichung von Tschebyschev um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ein aus 100 Mitgliedern bestehendes Team zwischen keine und 20 richtige Antworten gibt.

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Für $a \neq 0$ sei

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax^2} & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Bestimmen Sie $a \neq 0$, so dass ω Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.

ii) Berechnen Sie für dieses a die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X.