Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2012/13
30.01.2013

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. Aus statistischen Untersuchungen ist bekannt, dass 5% aller Texte einen bestimmten Rechtschreibfehler enthalten. Ein Programm zur Überprüfung der Rechtschreibung eines Textes, erkennt diesen Rechtschreibfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,90$. Enthält ein Text den Rechtschreibfehler nicht, so erkennt das Programm dennoch den Rechtschreibfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   i) das Programm bei einem zufällig überprüften Text diesen Rechtschreibfehler erkennt mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit $P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i),\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i,\ B \subseteq \Omega.$

   ii) der Text diesen Rechtschreibfehler enthält, falls das Programm den Rechtschreibfehler erkennt. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

   [Lösung]

   Sei A das Ereignis, dass der Text den Rechtschreibfehler enthält; B, dass das Programm den Rechtschreibfehler erkennt.

   $P(B|A) = 0,9,\ P(B|\bar{A}) = 0,2,\ P(A) = 0,05,\ P(\bar{A}) = 0,95$

   zu i) Nach dem Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \\ &= 0,90 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,95 \\ &= 0,045 + 0,19 = 0,235 \end{aligned}$$

   zu ii) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}045}{0{,}235} \approx 0,2$
   mit $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x^2, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

   gegeben:

   i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsgröße X ist, d.h., zeigen Sie $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   ii) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

iii) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X < \frac{1}{2})$ und $P(X > \frac{3}{2})$.

[Lösung]

zu i)
$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_1^2 x^{-2}dx \\ &= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^2 = \tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{1}{2} - (-1)\right) = 1\end{aligned}$$

zu ii)
$$\begin{aligned}E(X) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_1^2 \tfrac{1}{x}dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + [\ln|x|]_1^2 = \tfrac{1}{3} + \ln 2\end{aligned}$$

zu iii)
$$\begin{aligned}P\left(x < \tfrac{1}{2}\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} \\ P\left(x > \tfrac{3}{2}\right) &= 1 - P\left(x \le \tfrac{3}{2}\right) = 1 - \int\limits_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx = 1 - \left(\int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_1^{\frac{3}{2}} x^{-2}dx\right) \\ &= 1 - \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^{\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{2}{3} + 1\right) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2x + 4$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

   i) Zeigen Sie, dass $p(x) = 1 - 2x + 4x^2$ das quadratische Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_i = i - 1$ mit $i = 0, 1, 2$ ist.

   ii) Berechnen Sie $f(0,5)$ näherungsweise mithilfe des Interpolationspolynoms $p(x)$.

   iii) Bestimmen Sie fünf Stützstellen (a_i, b_i), $0 \le i \le 4$, mit $a_i \in [-1, 1]$, so dass $p(x)$ das Interpolationspolynom bzgl. diesen Stellen ist.

[Lösung]

zu i)

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	7	1	3

$$\begin{aligned}p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ 7 &= a_0 - a_1 + a_2 \\ 1 &= a_0 \\ 3 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\Rightarrow a_0 = 1, a_2 = 4, a_1 = -2 \\ p(x) &= 1 - 2x + 4x^2\end{aligned}$$

zu ii) $x^* = 0,5$ und $f(0,5) \approx p(0,5) = 1 - 2\cdot 0,5 + 4\cdot 0,5^2 = 1 - 1 + 4\cdot 0,25 = 1$

zu iii) Gemäß Satz 21.1 müssen diese fünf Stützstellen „auf dem Polynom $p(x)$ liegen“, d.h. $p(a_i) = b_i$. Für (zum Beispiel) $a_i = -1, -1/2, 0, 1/2, 1$ erhält man $b_i = p(a_i) = 7, 3, 1, 1, 3$.

4. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit
$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

i) Untersuchen Sie die Matrix A auf Diagonaldominanz.

ii) Berechnen Sie, ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0, -1)^T$, zwei Näherungslösungen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ mithilfe des Jacobi-Verfahrens $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U) \cdot x^{(k)})$.

iii) Zeigen Sie, dass der relative Fehler der Näherungslösung $x^{(2)} = \binom{7/6}{-13/6}$ des Jacobi-Verfahrens im Vergleich zur exakten Lösung kleiner als $1/9$ ist.

[Lösung]

zu i) A ist diagonaldominant, da $|4| > |-1|$ und $|3| > |2|$.

zu ii) Jacobi-Verfahren:
mit $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

zu iii) $x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix}$ echte Lösung: $x^\star = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Somit ist der relative Fehler:

$$\frac{||x - x^\star||}{||x^\star||} = \frac{\sqrt{2}/6}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3\sqrt{10}} < \frac{1}{9},$$

da $\sqrt{10}$ größer als 3 ist.

5. i) Zeigen Sie, dass $y_1 = \sin(2x)$ und $y_2 = \cos(2x)$ linear unabhängige Funktionen sind.

ii) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2\,y = \sin(2\,x).$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

[Lösung]

zu i) Zum Beispiel mit Hilfe der Wronski-Determinante (siehe Def. 22.14 und Satz 22.15). Hier ist

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{\prime} & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin(2x) & \cos(2x) \\ 2\cos(2x) & -2\sin(2x) \end{pmatrix} \\ &= -2\sin^2(2x) - 2\cos^2(2x) = -2 \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Also sind y_1, y_2 linear unabhängig.

zu ii) Es handelt sich hierbei um eine lineare inhomogene DG mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen DG lautet

$$\tau(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

zu ii.a) Hier verwenden wir für eine partikuläre Lösung y_p den Ansatz aus Satz 22.27 ii) und bzgl. der dortigen Notation haben wir $m = 0$, $\beta = 0$ und $\gamma = 2$. Wegen $\tau(\gamma \mathrm{i}) = \tau(2\,\mathrm{i}) \neq 0$ ergibt sich der Ansatz

$$y_p = b_0(\mu_1 \cos(2x) + \mu_2 \sin(2x)) = \rho_1 \cos(2x) + \rho_2 \sin(2x),$$

mit $\rho_i = b_0\,\mu_i$. Ableiten ergibt

$$y_p' = -2\rho_1 \sin(2x) + 2\rho_2 \cos(2x), \quad y_p'' = -4\rho_1 \cos(2x) - 4\rho_2 \sin(2x).$$

Einsetzen in die DG führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= y_p'' - y_p' - 2\,y_p - \sin(2x) \\ &= \cos(2x)(-6\rho_1 - 2\rho_2) + \sin(2x)(-6\rho_2 + 2\rho_1 - 1). \end{aligned}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ (siehe Teil i)) muss gelten $-6\rho_1 - 2\rho_2 = 0$ und $-6\rho_2 + 2\rho_1 - 1 = 0$ mit der Lösung $\rho_1 = 1/20$ und $\rho_2 = -3/20$. Somit ist $y_p = \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x)$ eine partikuläre Lösung der DG.

zu ii.b) Das charakteristische Polynom hat die beiden Nullstellen $\lambda = -1$ und $\lambda = 2$. Nach Satz 22.26 sind somit e^{-x} und $\mathrm{e}^{2\,x}$ zwei linear unabhängige Lösungen und nach Satz 22.13/22.16 ist daher die allgemeine Lösung der DG gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x) + c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{2\,x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $y(0) = \frac{1}{20} + c_1 + c_2$. Mit $c_2 = 0$ und $c_1 = -\frac{1}{20}$ ist dann $y(0) = 0$ und $y(x) = \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x) - \frac{1}{20}\,\mathrm{e}^{-x}$ ist eine Lösung der DG mit $y(0) = 0$.

6. Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgendes Problem lösen:

$$y' + \sin(x)y = \sin(x),$$

mit $y(\pi/2) = 1$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung und die Lösung y des Problems unter der Annahme $y(\pi/2) = 1$.

[Lösung]

i) Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist

$$y' + \sin(x)y = 0.$$

Die Lösung y_h davon kann man mittels Separation der Variablen (Satz 22.24) wie folgt finden:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\sin(x)dx.$$

Somit ist $\ln(y_h(x)) = \cos(x) + c_1$ für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y_h(x) = c\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

für $c \in \mathbb{R}$.

ii) Eine partikuläre Lösung findet man mit Hilfe der Variation der Konstanten (Bemerkung 22.19 oder durch "draufschauen"). Diese ist dann der Form

$$y_p(x) = c(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$$

wobei $c(x)$ bestimmt werden soll (oder mit Bemerkung 22.19 direkt berechnet werden). Die Ableitung von y_p ist nun $y_p(x)' = -\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}c(x) + c'(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}$. Einsetzen in der inhomogenen Differentialgleichung liefert

$$-\sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}c(x) + c'(x)\mathrm{e}^{\cos(x)} + \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}c(x) = \sin(x).$$

Also ist $c'(x)\mathrm{e}^{\cos(x)} = \sin(x)$. Mittels Integration bzgl. x erhalten wir $c(x)$:

$$c(x) = \int c'(x)dx = \int \sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)} + c_2,$$

mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Somit ist eine partikuäre Lösung ($c_2 = 0$) $y_p = \mathrm{e}^{-\cos(x)}\mathrm{e}^{-\cos(x)} = 1$.

iii) Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung ist gegeben durch (Satz 22.16) $y = y_p + y_h$. Also ist $y = c\mathrm{e}^{\cos(x)} + 1$, $c \in \mathbb{R}$.

Um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden, setzen wir den Wert in der inhomogenen Differentialgleichung ein:

$$y(\pi/2) = c\mathrm{e}^{\cos(\pi/2)} + 1 = c + 1 = -1.$$

Somit ist $c = -2$, und $-2\mathrm{e}^{\cos(x)}+1$ ist die Lösung des Anfangswertproblems.