Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. A. Pott, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WiSe 2019/20
05.02.2020

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**

Gesamtpunktzahl der Klausur (maximal 54)	Note

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Kein Taschenrechner.
- Sie dürfen ein beidseitig beschrieben/bedrucktes Blatt (A4 Format) als "Formelsammlung" benutzen.
- Pro Aufgabe gibt es 9 Punkte.
- Bestanden ist ab 20 Punkten.

Viel Erfolg!

1. Zwei Spieler A und B spielen ein Spiel wie folgt:

   - A und B halten gleichzeitig jeweils einen oder zwei Finger in die Höhe.
   - Wenn A und B gleich viele Finger zeigen (also beide jeweils einen oder jeweils 2), dann erhält Spieler A von B so viele Euro, wie insgesamt Finger gezeigt wurden, also 2 oder 4. Wenn A und B unterschiedlich viele Finger zeigen, erhält B von A genau drei Euro.

   (a) Zeigen Sie: Wenn Spieler A mit Wahrscheinlichkeit (WK) a einen und mit WK $1-a$ zwei Finger zeigt, und entsprechend Spieler B mit WK b einen und mit WK $1-b$ zwei Finger zeigt, dann ist der Erwatungswert $E_{a,b}$ für den Gewinn von A

   $$E(a,b) = 4 + 12ab - 7(a+b).$$

   (b) Geben Sie ein b an, so dass $4 + 12ab - 7(a+b)$ unabhängig von a ist. Wie groß ist in dem Fall der erwartete Gewinn für B?

2. Gegeben sei die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & \text{für } 1 \le x < 2, \\ \frac{a}{6}(x+1)+1 & \text{für } 2 \le x < 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist.

   (b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ von X.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4x + 3 - e^x$.

   (a) Zeigen Sie, dass im Intervall $[0,\ 1]$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, also eine Nullstelle von f liegt.

   (b) Geben Sie, ausgehend von $x_0 = 0$, einen Schritt des Newton-Verfahrens an und bestimmen so x_1.

4. In der Vorlesung haben wir gezeigt, wie man die LU-Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

einer Matrix $\mathbf{A}$ finden kann, wobei $\mathbf{U}$ Zeilenstufenform hat, $\mathbf{P}$ in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag 1 und sonst 0, und $\mathbf{L}$ eine untere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonaleinträge 1 sind.

Wir nehmen an, dass wir bei der Suche nach der LU-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ folgendes Zwischenergebnis erhalten haben:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(a) Geben Sie $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie, ausgehend von (1), die LU-Zerlegung von $\mathbf{A}$ an.

5. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y^2 = 1 - x^2\sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y^2 = 0$.

(b) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung $y' - \sqrt{x}y^2 = 1 - x^2\sqrt{x}$ mithilfe des Ansatzes $y_p = Ax + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der inhomogenen Differentialgleichung mit $y(1) = -1$.

6. Gegeben sei die Differentialgleichung und $k \cdot s''(t) - s'(t) = 0$, wobei $k \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $s'(0) = s(0) = 1$.

(c) Untersuchen Sie das Verhalten von $s(t)$ (wie in (b) bestimmt) mit $t \to \infty$ für $k < 0$.