

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
WiSe 2019/20
19.06.2020

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	
--------------------------------	--

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5
Punkte	10	10	10	10	10

Gesamtpunktzahl der Klausur (50)	Note

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Kein Taschenrechner.
- Sie dürfen ein beidseitig beschrieben/bedrucktes Blatt (A4 Format) als "Formelsammlung" benutzen.
- Pro Aufgabe gibt es 10 Punkte.
- Bestanden ist ab 20 Punkten.

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Standardabweichung $\sigma = 3$ und unbekanntem Erwartungswert μ . Sie ziehen eine Stichprobe x_1, \dots, x_9 vom Umfang $n = 9$ und berechnen

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 3.$$

- (a) Geben Sie ein Intervall (a, b) an ($a, b \in \mathbb{R}$), das den Erwartungswert μ mit Wahrscheinlichkeit 0,99 enthält.
- (b) Geben Sie ein Intervall (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$, an, das den Erwartungswert μ mit Wahrscheinlichkeit 0,99 enthält.
- (c) Können Sie bei einem Stichprobenumfang $n = 100$ ein Intervall (a, b) mit $b - a \leq 1$ angeben, das den Erwartungswert μ mit Wahrscheinlichkeit 0,99 enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Gegeben seien die Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ einer diskreten Zufallsgröße X_1 und $F_2(x)$ einer stetigen Zufallsgröße X_2 :

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 0,2 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 0,4 & \text{für } 0 \leq x < 3, \\ 0,9 & \text{für } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{für } 4 \leq x, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-2x} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie die Werte, die die diskrete Zufallsgröße X_1 annehmen kann und die dazugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten.
- (b) Ermitteln Sie die Dichtefunktion der stetigen Zufallsgröße X_2 .
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X_1)$.
- (d) Berechnen Sie $P(X_1 > 1)$ und $P(X_2 > 1)$.

3. Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

- (a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ von f (also ein Polynom vom Grad 2) mit den Stützpunkten $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ und $(1, f(1))$.
- (b) Geben Sie einen Näherungswert für $\int_{-1}^1 f(x) dx$ mithilfe des Interpolationspolynoms $P_2(x)$ an.
- (c) Begründen Sie, warum im Intervall $[0, 1]$ genau eine Lösung der Gleichung $f(x) = 2 \sin(x)$, d.h. $\sqrt{1-x^2} = 2 \sin(x)$, liegt.
- (d) Geben Sie den 1. Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ an, um diese Nullstelle zu finden.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\varphi^2 \frac{dr}{d\varphi} + \frac{1}{2}r = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
- (b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\varphi^2 \frac{dr}{d\varphi} + \frac{1}{2}r = 0 \quad \text{mit} \quad r\left(\frac{1}{2}\right) = 2e.$$

5.1 Gegeben Sei die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 7xy' + 15y = x.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $y = \frac{1}{8}x + C_1 x^3 + C_2 x^5$ diese Differentialgleichung löst.
- (b) Bestimmen Sie C_1 und C_2 so, dass $y(1) = y'(1) = 0$ gilt.

5.2 Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 7y' - 8y = 0$.

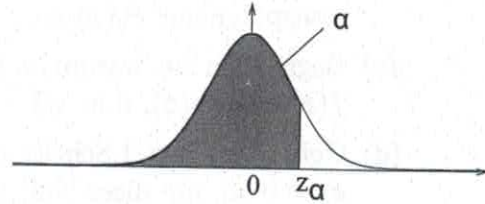
- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.
Lösen Sie die Differentialgleichung mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$.

Quantile z_α der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$

Ablesebeispiel: $z_{0.95} = 1.6449$.

Erweiterung der Tafel: $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz \quad \text{Verteilungsfunktion}$$



α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α
0.9999	3.7190	0.9955	2.6121	0.975	1.9600	0.780	0.7722
0.9998	3.5401	0.9950	2.5758	0.970	1.8808	0.770	0.7388
0.9997	3.4316	0.9945	2.5427	0.965	1.8119	0.760	0.7063
0.9996	3.3528	0.9940	2.5121	0.960	1.7507	0.750	0.6745
0.9995	3.2905	0.9935	2.4838	0.955	1.6954	0.740	0.6433
0.9994	3.2389	0.9930	2.4573	0.950	1.6449	0.730	0.6128
0.9993	3.1946	0.9925	2.4324	0.945	1.5982	0.720	0.5828
0.9992	3.1559	0.9920	2.4089	0.940	1.5548	0.710	0.5534
0.9991	3.1214	0.9915	2.3867	0.935	1.5141	0.700	0.5244
0.9990	3.0902	0.9910	2.3656	0.930	1.4758	0.690	0.4959
0.9989	3.0618	0.9905	2.3455	0.925	1.4395	0.680	0.4677
0.9988	3.0357	0.9900	2.3263	0.920	1.4051	0.670	0.4399
0.9987	3.0115	0.9895	2.3080	0.915	1.3722	0.660	0.4125
0.9986	2.9889	0.9890	2.2904	0.910	1.3408	0.650	0.3853
0.9985	2.9677	0.9885	2.2734	0.905	1.3106	0.640	0.3585
0.9984	2.9478	0.9880	2.2571	0.900	1.2816	0.630	0.3319
0.9983	2.9290	0.9875	2.2414	0.895	1.2536	0.620	0.3055
0.9982	2.9112	0.9870	2.2262	0.890	1.2265	0.610	0.2793
0.9981	2.8943	0.9865	2.2115	0.885	1.2004	0.600	0.2533
0.9980	2.8782	0.9860	2.1973	0.880	1.1750	0.590	0.2275
0.9979	2.8627	0.9855	2.1835	0.875	1.1503	0.580	0.2019
0.9978	2.8480	0.9850	2.1701	0.870	1.1264	0.570	0.1764
0.9977	2.8338	0.9845	2.1571	0.865	1.1031	0.560	0.1510
0.9976	2.8202	0.9840	2.1444	0.860	1.0803	0.550	0.1257
0.9975	2.8070	0.9835	2.1321	0.855	1.0581	0.540	0.1004
0.9974	2.7944	0.9830	2.1201	0.850	1.0364	0.530	0.0753
0.9973	2.7821	0.9825	2.1084	0.845	1.0152	0.520	0.0502
0.9972	2.7703	0.9820	2.0969	0.840	0.9945	0.510	0.0251
0.9971	2.7589	0.9815	2.0858	0.835	0.9741	0.500	0.0000
0.9970	2.7478	0.9810	2.0749	0.830	0.9542		
0.9969	2.7370	0.9805	2.0642	0.825	0.9346		
0.9968	2.7266	0.9800	2.0537	0.820	0.9154		
0.9967	2.7164	0.9795	2.0435	0.815	0.8965		
0.9966	2.7065	0.9790	2.0335	0.810	0.8779		
0.9965	2.6968	0.9785	2.0237	0.805	0.8596		
0.9964	2.6874	0.9780	2.0141	0.800	0.8416		
0.9963	2.6783	0.9775	2.0047	0.795	0.8239		
0.9962	2.6693	0.9770	1.9954	0.790	0.8064		
0.9961	2.6606	0.9765	1.9863	0.785	0.7892		
0.9960	2.6521	0.9760	1.9774	0.780	0.7722		