Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. H. Bräsel/Dr. A. Schürmann

Vordiplomklausur Mathematik III/IV
Fachrichtung: Computervisualistik
31. Januar 2006

Name	Vorname	Fachrichtung	Matrikelnummer	1.Wiederholung
				ja/nein

Punktebewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	24	7	6	15	18	12	12	11	105
erreichte Punkte									

Alle Aussagen sind sorgfältig zu begründen!

1. Gegeben ist die für alle reellen x definierte Funktion $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

   (a) Bestimmen Sie $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.

   (b) Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und skizzieren Sie die Funktion.

   (c) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $a = x_0 = 0$ in ein Taylorpolynom $P_T(x)$ zweiten Grades, berechnen Sie $P_T(x)$ für $x = 0,1$ und schätzen Sie den Fehler ab.

   (d) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P_I(x)$ für die Funktion $f(x)$ an den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ und stellen Sie es in der Form $P_I(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dar. Welchen Wert hat $P_I(x)$ an der Stelle $x = 0,1$?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörenden homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:
$$y'' + 3y' - 4y = e^{2x}.$$

3. Gegeben ist die folgende Verteilungsfunktion $F(x)$ für die diskrete Zufallsgröße X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \le -2 \\ 0,2 & \text{für } -2 < x \le -1 \\ 0,35 & \text{für } -1 < x \le 1 \\ 0,4 & \text{für } 1 < x \le 4 \\ 0,6 & \text{für } 4 < x \le 6 \\ 1 & \text{für } 6 < x < \infty \end{cases}$$

   (a) Welche Werte nimmt die diskrete Zufallsgröße X an? Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden diese Werte angenommen?

   (b) Berechnen Sie $P(-5 \le X \le 1)$ und $P(X > 15)$.

4. Gegeben ist die folgende Dichtefunktionen $g(x)$ einer stetigen Zufallsgröße X, wobei $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ a(x+1)e^{-x} & \text{für } x > -1 \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante a und skizzieren Sie die Dichtefunktion (vergleiche Aufgabe 1).

(b) Welche Verteilungsfunktion $F(x)$ hat die stetige Zufallsgröße X?

(c) Berechnen Sie $P(0 \leq X < 1)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

5. Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem (LOP):

$$\begin{array}{rcrrrcl} z & = & 2x_1 & -3x_2 & & = & \max! \\ & & x_1 & +4x_2 & & \leq & 8 \\ & & x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & & & x_i & \geq & 0, \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

(a) Geben Sie die Normalform für das LOP an und lösen Sie es mit der Simplexmethode. Warum muß man die Zwei-Phasen-Methode verwenden?

(b) Lösen Sie das Problem geometrisch, nachdem Sie die Nebenbedingungen entweder in zwei Ungleichungen oder in zwei Gleichungen umgeformt haben (erste bzw. zweite geometrische Interpretation).

6. Man gebe eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die in homogenen Koordinaten eine Rotation im $\mathbb{R}^2$ mit Winkel $\frac{\pi}{4}$ um den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bewirkt.

7. Man gebe eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die in homogenen Koordinaten eine Reflexion im $\mathbb{R}^2$ bewirkt, bei der das Dreieck $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ auf das Dreieck $\operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ abgebildet wird.

8. (a) Man bestimme Kontrollpunkte c_0, c_1, c_2, so dass die Bézierkurve

$$B(t) = \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t)c_i, \quad t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$c(x) = (2x-1, 4x^2-4x+1)^\top, \quad x \in [0,1],$$

ist.

(b) Man gebe eine Reparametrisierung $\tilde{c} : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ der Bézierkurve an.

(c) Man skizziere die Bézierkurve, zusammen mit ihren Kontrollpunkten.