Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik IV

Fachrichtung: Computer Science in Engineering, Computervisualistik, Informatik

SS 2008
15.07.2008

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Kurven

i) Sei $c(t) = (1+\cos t)\binom{\cos t}{\sin t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Man berechne den Tangentialvektor in $c(\pi)$ und die Gleichung der Tangentialgeraden in $c(\pi/2)$.

ii) Für die Kurve $c(t) = (\sqrt{2}\,\sin t, \sqrt{2}\,\cos t, b\,t)^\intercal$, $t \in [0, 2\pi]$, bestimme man alle $b \in \mathbb{R}$, so dass für die Länge der Kurve gilt: $L(c) = 4\,\pi$.

iii) Sei $B : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Bezierkurve bzgl. den Kontrollpunkten

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $B(1/2)$.

zu i): Für den Tangentialvektor erhalten wir (siehe 20.4)

$$\dot c(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1+\cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

so dass $\dot c(\pi) = (0,0)^\intercal$ und $\dot c(\pi/2) = -(1,1)^\intercal$. Weiterhin ist $c(\pi/2) = (0,1)^\intercal$, so dass die Tangentialgerade T in $c(\pi/2)$ gegeben ist durch

$$T = \{c(\pi/2) + \lambda \dot c(\pi/2) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

bzw. $T = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : x - y = -1\}$.

zu ii) Siehe Übungsaufgabe 1.1 ii). Es ist $\dot c(t) = (\sqrt{2}\,\cos t, -\sqrt{2}\,\sin t, b)^\intercal$ und so

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t + b^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+b^2}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\sqrt{2+b^2}.$$

Somit ist $L(c) = 4\pi$ genau dann, wenn $\sqrt{2+b^2} = 2$, d.h. $2 + b^2 = 4$ bzw. $b = \pm\sqrt{2}$.

zu iii): Es ist (siehe 20.13)

$$\begin{aligned} B(t) &= \binom{3}{0}(1-t)^3\,c_0 + \binom{3}{1}(1-t)^2\,t\,c_1 + \binom{3}{2}(1-t)\,t^2\,c_2 + \binom{3}{3}\,t^3\,c_3 \\ &= (1-t)^3\,c_0 + 3\,(1-t)^2\,t\,c_1 + 3\,(1-t)\,t^2\,c_2 + t^3\,c_3 \end{aligned}$$

Wegen $c_0 = -c_3$ und $c_1 = -c_2$ ist daher

$$B(1/2) = \frac{1}{8}c_0 + 3\frac{1}{8}c_1 + 3\frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{8}c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Numerik I

i) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq -4} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x+4}$ an den Stützstellen $x_0 = -3,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 5$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom.

ii) Man bestimme die (Euklidische) Norm der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

zu i):

x	-3	0	5
$f(x)$	1	2	3

Newton-Verfahren: $P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

$$\begin{array}{cr|lll} x_0 & -3 & 1 & & \\ x_1 & 0 & 2 & p_{11} = \frac{1}{3} & \\ x_2 & 5 & 3 & p_{21} = \frac{1}{5} & p_{22} \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_{11} &= \tfrac{2-1}{0-(-3)} &= \tfrac{1}{3} \\ p_{21} &= \tfrac{3-2}{5-0} &= \tfrac{1}{5} \\ p_{22} &= \tfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{5-(-3)} &= -\tfrac{1}{60} \end{aligned}$$

(oder Gleichungssystem)

$$P_2(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(x+3) - \tfrac{1}{60}(x+3)x = 2 + \tfrac{17}{60}x - \tfrac{1}{60}x^2$$

zu ii): (vgl. Notation 21.14) Wegen

$$A^\intercal A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sind $9, 1, 4$ die Eigenwerte von $A^\intercal A$, und daher ist $||A|| = 3$.

3. Numerik II

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix A.

ii) Finden Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} ||Ax-b||.$$

zu i):

$$u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad ||u_1|| = 2$$

$$u_2 = a_2 - \frac{\langle u_1, a_2\rangle}{||u_1||^2} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ||u_2|| = 1$$

Also ist $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ und $R = (r_{ij}) = \left(\frac{\langle u_i, a_j\rangle}{||u_i||}\right) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

zu ii): (vgl. Satz 21.22) Für die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems gilt $Rx = Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Rx = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt $x_2 = 1$ und $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Demnach ist $x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Differentialgleichungen I

Bestimmen Sie eine Funktion $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, die folgendes Anfangswertproblem löst:

$$2xy' + y = 2\sqrt{x} \quad \text{und} \quad y(1) = 0.$$

Wir lösen zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$2xy' + y = 0$$

mittels Separation der Variablen (vgl. Satz 22.4). Es gilt

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{1}{2x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x| + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Demnach sind sämtliche homogenen Lösungen gegeben durch

$$y_h(x) = \frac{c}{\sqrt{|x|}} = \frac{c}{\sqrt{x}} \text{ mit } c \in \mathbb{R},$$

da $x > 0$. Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Ausgangsgleichung zu finden, verwenden wir das Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 22.19 führt der Ansatz $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{x}}$ zu

$$c(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\int -\frac{1}{2x}dx} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{x} dx = x.$$

Also ist $y_p(x) = \sqrt{x}$ partikuläre Lösung und nach Satz 22.16 ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

Lösung der gegebenen Gleichung. Einsetzen des Anfangswertes liefert nun

$$0 = y(1) = c + 1 \quad \text{also} \quad c = -1,$$

und damit als Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. **Differentialgleichungen II**

Gegeben seien $y_1(x) = 1 + e^{-x}$ und $y_2(x) = e^{-x+e^x}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen y_1 und y_2 linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) - y(x) = e^x y'(x)$ sind.

Um die Lösungseigenschaft zu zeigen, berechnen wir zunächst die ersten Ableitungen. Es gilt:

$$y_1'(x) = -e^{-x} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = e^{-x}$$

und

$$y_2'(x) = (e^x - 1)e^{-x+e^x} \quad \text{und} \quad y_2''(x) = (e^{2x} - e^x + 1)e^{-x+e^x}.$$

Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert nun für y_1:

$$-1 = e^{-x} - (1 + e^{-x}) = y_1''(x) - y_1(x) = e^x y_1'(x) = e^x(-e^{-x}) = -1,$$

und analog für y_2:

$$(e^x - 1)e^{e^x} = y_2''(x) - y_2(x) = e^x y_2'(x) = (e^x - 1)e^{e^x}.$$

Um die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Funktionen zu zeigen, berechnen wir die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = e^{e^x}.$$

Es ist also $W(x) \neq 0$ und damit nach Satz 21.15 alles gezeigt.

6. Differentialgleichungen III

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 2x - 2 + 10e^{-x}.$$

Um die homogenen Lösungen zu bestimmen, betrachten wir das zugehörige charakteristische Polynom (vgl. Definition 22.25)

$$\tau(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - (1 - i))(\lambda - (1 + i)).$$

Die Nullstellen von τ korrespondieren nun zu linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung (vgl. Satz 22.26):

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x,\ \ c_i \in \mathbb{R}.$$

Um eine inhomogene Lösung zu bestimmen zerlegen wir die Ausgangsgleichung in

I) $y_1''' - 3y_1'' + 4y_1' - 2y_1 = 2x - 2$ und

II) $y_2''' - 3y_2'' + 4y_2' - 2y_2 = 10e^{-x}$

und bestimmen jeweils partikuläre Lösungen mittels Satz 22.27. Die rechte Seite von I) hat die Form $p(x)e^{\alpha x}$, wobei p ein Polynom vom Grad 1 und $\alpha = 0$ ist. Wegen $\tau(0) \neq 0$ setzen wir als partikuläre Lösung $y_1(x) = b_1 x + b_0$ an. Einsetzen in I) führt zu $-2b_1 x + (4b_1 - 2b_0) = 2x - 2$, also $b_0 = b_1 = -1$ und damit ist $y_1(x) = -x - 1$.
Analog bestimmt man $y_2(x) = -e^{-x}$ als partikuläre Lösung von II) und erhält damit eine Lösung des inhomogenen Ausgangsproblems

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = -x - 1 - e^{-x}.$$

Demzufolge ist für jede Wahl von $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x - x - 1 - e^{-x}$$

Lösung der gegebenen Differentialgleichung.