Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik IV

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2008
18.10.2008

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Kurven

i) Sei $c(t) = (1 + \sin t)\binom{\sin t}{\cos t}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Man berechne den Tangentialvektor in $c(-\pi/2)$ und die Gleichung der Tangentialgeraden in $c(0)$.

ii) Für die Kurve $c = \{(x, y)^\intercal : 2\,x^2\,y + x\,y + 3\,x\,y^3 - 4 = 0\}$ bestimme man einen Normaleneinheitsvektor in $(-1, 1)^\intercal$.

iii) Sei $B : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Bezierkurve bzgl. den Kontrollpunkten

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Bezierkurve $B(t)$ und den Tangentialvektor in $B(1/2)$.

zu i): Für den Tangentialvektor erhalten wir (siehe 20.4)

$$\dot{c}(t) = \cos t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (1 + \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

so dass $\dot{c}(-\pi/2) = (0, 0)^\intercal$ und $\dot{c}(0) = (1, 1)^\intercal$. Weiterhin ist $c(0) = (0, 1)^\intercal$, so dass die Tangentialgerade T in $c(0)$ gegeben ist durch

$$T = \{c(0) + \lambda \dot{c}(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

bzw. $T = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : x - y = -1\}$.

zu ii) Für den Gradienten der Funktion $f(x, y) = 2\,x^2\,y + x\,y + 3\,x\,y^3 - 4$ ergibt sich

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 4\,x\,y + y + 3\,y^3 \\ 2\,x^2 + x + 9\,x\,y^2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{grad} f(-1, 1) = \binom{0}{-8}$, und nach Bemerkung 20.6 ii) ist $(0, -1)^\intercal$ ein Normaleneinheitsvektor.

zu iii): Es ist (siehe 20.13)

$$\begin{aligned} B(t) &= \binom{3}{0}(1-t)^3\,c_0 + \binom{3}{1}(1-t)^2\,t\,c_1 + \binom{3}{2}(1-t)\,t^2\,c_2 + \binom{3}{3}\,t^3\,c_3 \\ &= (1-t)^3\,c_0 + 3\,(1-t)^2\,t\,c_1 + 3\,(1-t)\,t^2\,c_2 + t^3\,c_3 \\ &= \begin{pmatrix} -2\,t^3 + 3\,t - 1 \\ 2\,t^3 + 3\,t - 6\,t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{B}(t) = \binom{-6\,t^2 + 3}{6\,t^2 + 3 - 12\,t}$ und daher $\dot{B}(1/2) = \binom{3/2}{-3/2}$.

2. Numerik I

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems $Ax = b$ mithilfe der LU-Faktorisierung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc} & L_k & U_k & \\ k=0: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \alpha_{1/2} = -4 \\ \alpha_{1/3} = -2 \end{array} \\ k=1: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} & \alpha_{2/3} = 6 \\ k=2: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$Ly = b, \; y$ durch Rückwärtselimination

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} y_1 & & & & & & & = & 7 \\ y_2 & = & 23 & - & 4y_1 & & & = & -5 \\ y_3 & = & 6 & - & 2y_1 & + & 6y_2 & = & -38 \end{array}$$

$Ux = y, \; x$ durch Rückwärtselimination

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcr} x_3 & & & & & & & = & 1 \\ x_2 & = & -5 & & & + & 6x_3 & = & 1 \\ x_1 & = & 7 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Numerik II

Gegeben ist die Gleichung $2x - \ln(x-1) = 6$. Weiterhin sei $\ln 3 \approx 1,1$.

(a) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem die größte Lösung dieser Gleichung liegt.

(b) Bestimmen Sie eine Näherung dieser Lösung mithilfe eines geeigneten Iterationsverfahrens. Führen Sie eine Interation aus.

zu (a) $F(x) = 2x - \ln(x-1) = 6$

Aus $F(2) = -2 > 0$ und $F(4) = 2 - \ln 3 \approx 0,9 > 0$ folgt $F(2) \cdot F(4) < 0$, also in $[2,4]$ existiert Nullstelle und mit wachsendem x bleibt $F(x) > 0$.

Größte Nullstelle im Intervall $[2, 4]$. (Graphisch auch möglich.)

zu (b) Wähle z. B. Startlösung: $x_0 = 4$ und das Newton-Verfahren

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$

$x_1 = 4 - \frac{0{,}9}{\frac{5}{3}} = \frac{20-2{,}7}{5} = \frac{17{,}3}{5} = 3{,}46$

4. Differentialgleichungen I

Bestimmen Sie eine Funktion $y : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, die folgendes Anfangswertproblem löst:

$$xy' + 2y = e^{-2x} \quad \text{und} \quad y(-\frac{1}{2}) = 0.$$

Wir lösen zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$xy' + 2y = 0$$

mittels Separation der Variablen (vgl. Satz 22.4). Es gilt

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -2 \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y(x)| = -2\ln|x| + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Demnach sind sämtliche homogenen Lösungen gegeben durch

$$y_h(x) = \frac{c}{|x|^2} = \frac{c}{x^2} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Ausgangsgleichung zu finden, verwenden wir das Verfahren der Variation der Konstanten. Nach Bemerkung 22.19 führt der Ansatz $y_p(x) = c(x)y_h(x) = \frac{c(x)}{x^2}$ zu

$$c(x) = \int \frac{e^{-2x}}{x} e^{-\int -\frac{2}{x}dx} dx = \int \frac{e^{-2x}}{x} e^{2\ln x} dx = \int x e^{-2x} dx.$$

Partielle Integration liefert $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, also ist $y_p(x) = -\frac{e^{-2x}}{2x^2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ partikuläre Lösung und nach Satz 22.16 ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{2x^2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Lösung der gegebenen Gleichung. Einsetzen des Anfangswertes liefert nun

$$0 = y(-\frac{1}{2}) = 4c \quad \text{also} \quad c = 0,$$

und damit als Lösung des Anfangswertproblems $y(x) = -\frac{e^{-2x}}{2x^2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

5. Differentialgleichungen II

Gegeben seien $y_1(x) = \sin(\ln x)$ und $y_2(x) = \cos(\ln x)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen y_1 und y_2 linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung $xy''(x) + y'(x) = -\frac{1}{x}y(x)$ sind.

Um die Lösungseigenschaft zu zeigen, berechnen wir zunächst die ersten Ableitungen. Es gilt:

$$y_1'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = -\frac{1}{x^2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$$

und

$$y_2'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \quad \text{und} \quad y_1''(x) = \frac{1}{x^2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)).$$

Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert nun für y_1:

$$-\frac{\sin(\ln x)}{x} = xy_1''(x) + y_1'(x) = -\frac{1}{x}y_1(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

und analog für y_2:

$$-\frac{\cos(\ln x)}{x} = xy_2''(x) + y_2'(x) = -\frac{1}{x}y_2(x) = -\frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

Um die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Funktionen zu zeigen, berechnen wir die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin(\ln x) & \cos(\ln x) \\ \frac{\cos(\ln x)}{x} & -\frac{\sin(\ln x)}{x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x}.$$

Es ist also $W(x) \neq 0$ und damit nach Satz 21.15 alles gezeigt.

6. Differentialgleichungen III

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 3e^x.$$

Um die homogenen Lösungen zu bestimmen, betrachten wir das zugehörige charakteristische Polynom (vgl. Definition 22.25)

$$\tau(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Die Nullstellen von τ korrespondieren nun zu linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung (vgl. Satz 22.26):

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x},\ c_i \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung bestimmen wir nun mittels Satz 22.27. Die rechte Seite hat die Form $p(x)e^{\alpha x}$, wobei p ein Polynom vom Grad 0 und $\alpha = 1$ ist. Wegen $\tau(1) = 0$ mit Vielfachheit 1 setzen wir als partikuläre Lösung $y_p(x) = bxe^x$ an. Die ersten Ableitungen berechnen sich zu $y_p'(x) = b(x+1)e^x, y_p''(x) = b(x+2)e^x$ und $y_p'''(x) = b(x+3)e^x$. Einsetzen in die Ausgangsgleichung führt zu $b = 3$ und damit ist $y_p(x) = 3xe^x$.
Schließlich ist für jede Wahl von $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + 3xe^x$$

Lösung der gegebenen Differentialgleichung.