Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. D. Ploog, Dr. M. Höding

Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik
SoSe 2018
10.07.2018

Name	Vorname	Fachrichtung	Matr.nummer

Anzahl der abgegebenen Blätter	

Punktebewertung der Klausur

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
max. Punkte	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
Punkte					

Unbenotete Leistung: Ja / Nein (Nichtzutreffendes streichen!)

Gesamtpunktzahl = 50	**Note**

Bitte beachten Sie folgende Hinweise!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt und nummerieren Sie Ihre Blätter.
- Bitte die Anzahl der abgegebenen Blätter auf dem Deckblatt eintragen.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Ein A4-Blatt Formelsammlung**

Viel Erfolg!

1. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x(2 - e^x)$.

   (a) Ermitteln Sie die Nullstellen von $f(x)$.

   (b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x)$ und bestimmen Sie die Art der Extremwerte.

   (c) Untersuchen Sie die Funktion auf Monotonie und geben Sie die Monotonieintervalle an.

   (d) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-\ln 2, \infty)$ konkav oder konvex ist.

2. Gegeben sei die Potenzreihe $P_\infty(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-(x-1)^k}{2k}$.

   (a) Untersuchen Sie die die Potenzreihe $P_\infty(x)$ auf Konvergenz.

   (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}_{<2} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln\sqrt{2-x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

   (c) Zeigen Sie, dass $P_\infty(x)$ die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ ist.

3. Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3(4\ln(x) - 1)$ und die Differentialgleichung $y' - \frac{y}{x(x-1)} = 2y$.

   (a) Bestimmen Sie $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \int\limits_1^2 x^3(4\ln(x) - 1)\,dx$.

   (b) Lösen Sie die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen.

   (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem der Differentialgleichung für $y(2) = e^2$.

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy(6 - x - y)$.

   (a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f.

   (b) Ermitteln Sie den Gradient und die Hesse-Matrix im Punkt $(2, 2)$.

   (c) Untersuchen Sie, ob die Funktion f im Punkt $(2, 2)$ einen lokalen Extremwert besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Art des lokalen Extremwertes.

5. (a) Gegeben sind die Permutationen $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ und $\sigma_2 = (3\,4\,5\,6\,7) \in S_7$. Bestimmen Sie $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und die Ordnung des Gruppenelementes $\sigma_1 \in S_7$.

   (b) Berechnen Sie $\varphi(72)$.

   (c) Untersuchen Sie, ob die multiplikative Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/6)^*$ aller modulo 6 invertierbaren ganzen Zahlen zwischen 1 und 6 zyklisch ist.

   (d) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

   (e) Ist die Menge $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ kompakt? Ist sie konvex?