Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2009/10
26.03.2010

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Differentialrechnung I

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y + z^2 - 4z.$$

i) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt $(1, 2, 3)$.

ii) Bestimmen Sie die Punkte, in denen der Gradient der Nullvektor ist.

iii) Bestimmen Sie die Hessematrix H_f im Punkt $(1, 2, 3)$.

LÖSUNG

i) $$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 \\ 2z - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad} f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ii)
$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Rightarrow y - 2\sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{2}\sqrt{x} = -3 \\ \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \mathbf{x = 4} \end{array}$$
$$2z - 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{z = 2} \qquad \mathbf{y = 1 + 3 = 4}$$

$\Rightarrow$ nur im Punkt $(4, 4, 2)$ verschwindet grad f

iii)
$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} f_{xx} = -\frac{1}{4}yx^{-\frac{3}{2}}, & f_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, & f_{xz} = 0 \\ f_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, & f_{yy} = -2, & f_{yz} = 0 \\ f_{zx} = 0, & f_{zy} = 0, & f_{zz} = 2 \end{array}$$

$$H_f(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

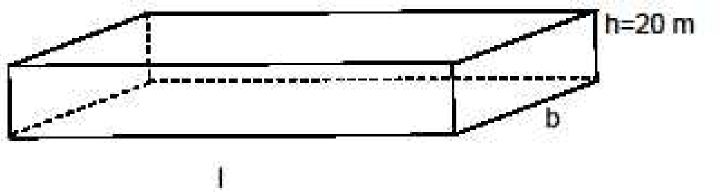
2. Differentialrechnung II

Bestimmen Sie die Abmessungen l und b eines rechtwinkligen oben offenen Wasserauffangbeckens mit minimaler Oberfläche unter der Bedingung, dass die Höhe h des Beckens 20 m und das Volumen des Beckens 32000 Liter betragen soll (siehe Skizze!).

LÖSUNG

Die Oberfläche des Beckens ist gegeben durch die Funktion

$$F(l, b) = l \cdot b + 40(l + b).$$



Diese soll minimiert werden unter der Nebenbedingung, dass für das Volumen $V(l,b) = 20 \cdot l \cdot b = 32000$ gilt. Einsetzen dieser Bedingung in F ergibt $f(l) = F(l,b) = 1600 + 40(l + \frac{1600}{l}) = 40l + 1600 + \frac{64000}{l}$. Nun ist

$$f'(l) = 40 - \frac{64000}{l^2} \text{ und } f''(l) = \frac{128000}{l^3}.$$

Als mögliche Extremwerte erhalten wir wegen $0 = f'(l) \Rightarrow l^2 = 1600$ also $l = \pm 40$. Nur positive Länge ist im gegebenen Problem sinnvoll, und daher hat unter Berücksichtigung von $f''(40) > 0$, die Funktion f ein Minimum bei $l = 40$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert, dass auch $b = 40$ ist, und damit hat das Becken bei quadratischer Grundfläche minimale Oberfläche.

Eine zweite Möglichkeit ist das Vorgehen nach dem Lagrange-Verfahren (siehe Satz 15.35). Dazu sei die Nebenbedingung durch $g(l,b) = 20lb - 32000 = 0$ beschrieben. Ist (l,b) ein lokales Extremum von F unter der Nebenbedingung, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} b+40 \\ l+40 \end{pmatrix} = \mathrm{grad}F(l,b) = \lambda \cdot \mathrm{grad}g(l,b) = \lambda \begin{pmatrix} 20b \\ 20l \end{pmatrix}$$

gilt. Daraus folgt $b = \frac{40}{20\lambda - 1} = l$ und mit $g(l,b) = 0$ haben wir $l^2 = 1600$, also wieder $l = \pm 40$. Damit ist $l = b = 40$ ein Extremum und wir müssen noch nachweisen, dass es sich um ein Minimum handelt.
Für jedes $\epsilon > 0$ ist mit $g(l,l) = 0$ auch $g(\frac{l}{1+\epsilon}, (1+\epsilon)l) = 20\frac{l}{1+\epsilon}(1+\epsilon)l - 32000 = 20l^2 - 32000 = 0$ erfüllt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} F\left(\frac{l}{1+\epsilon}, (1+\epsilon)l\right) &= \frac{l}{1+\epsilon}(1+\epsilon)l + 40\left(\frac{l}{1+\epsilon} + (1+\epsilon)l\right) \\ &= l^2 + 40l\frac{1+(1+\epsilon)^2}{1+\epsilon} \\ &> l^2 + 40l \cdot 2 \ = \ F(l,l). \end{aligned}$$

Daher kann der Punkt $(l,b) = (40,40)$ kein Maximum sein.

3. Integralrechnung

i) Sei T der trapezförmige Bereich mit Ecken $\binom{0}{0}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{4}{5}$. Beschreiben Sie T als Normalbereich.

ii) Sei $D = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 0,\, 0 \le y \le -x^2 - 2\,x\}$. Der Flächeninhalt von D beträgt $\frac{4}{3}$. Man bestimme die y-Koordinate des Schwerpunktes von D.

iii) Sei κ_3 das Volumen der 3-dimensionalen Kugel $B_3 = \{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ mit Radius 1. Seien $a, b, c > 0$, und sei

$$E(a,b,c) = \left\{ (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1 \right\}.$$

Man zeige, dass $\mathrm{vol}(E(a,b,c)) = a\,b\,c \cdot \kappa_3$.

LÖSUNG

i) $T = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x+1\}$.

ii) Sei y_S die y-Koordinate des Schwerpunktes. Gemäß Definition 16.22 ist

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D y \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{3}{4} \int_{-2}^{0} \left(\int_0^{-x^2-2\,x} y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4} \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{-x^2-2\,x} \right) \mathrm{d}x = \frac{3}{8} \int_{-2}^{0} \left(x^4 + 4\,x^3 + 4\,x^2 \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{5} x^5 + x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_{-2}^{0} = -\frac{3}{8} \left(\frac{-32}{5} + 16 + \frac{-32}{3} \right) = \frac{12}{5} - 6 + 4 \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen a, b, c. Dann ist $E(a,b,c) = A\,B_3 = \{A\,(x,y,z)^\intercal : (x,y,z)^\intercal \in B_3\}$, und mit Korollar 16.16 ist

$$\mathrm{vol}(E(a,b,c)) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(B_3) = a\,b\,c \cdot \kappa_3.$$

4. Lineare Optimierung

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte man folgendes LOP:

$$\begin{array}{rrcl} \max\{x_2 : & x_1 + x_2 - x_3 & \le & a, \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 & \le & 3, \\ & x_1 + 4x_2 + bx_3 & \le & 5, \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0\}. \end{array}$$

i) Lösen Sie das LOP für $a = 1$ und $b = 2$ mit Hilfe der Simplexmethode.

ii) Geben Sie jeweils ein Paar (a, b) an, so dass das zum gegebenen Problem gehörende Polyeder unbeschränkt bzw. leer ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG

i) Das Anfangstableau inklusive zusätzlichen Spalten für die Schlupfvariablen ist das folgende.

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Pivotieren nach Spalte 2 und Zeile 1:

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & \mathbf{6} & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Pivotieren nach Spalte 3 und Zeile 3:

$$\begin{array}{cccccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \\ \hline \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Nun sind alle relativen Kosten nicht-positiv und wir können die Optimallösung $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{7}{6}, \frac{1}{6})$ und den zugehörigen Optimalwert $\frac{7}{6}$ ablesen.

ii) Für z.B. $a = 1$ und $b = -1$ ist das zugehörige Polyeder unbeschränkt, da dann in allen Ungleichungen, die keine Nichtnegativitätsbedingungen sind, die x_3-Koordinate negatives Vorzeichen hat und damit für alle $t \geq 0$ der Punkt $(0, 0, t)$ im Polyeder enthalten ist.

Wählt man nun z.B. $a = -3$ und $b = 2$, so ist das zugehörige Polyeder leer. Denn dann lautet die erste Ungleichung $x_1 + x_2 - x_3 \leq -3$, woraus wegen $x_1, x_2 \geq 0$ folgt, dass

$$x_3 \geq 3 + x_1 + x_2 \geq 3$$

gilt. Aus der dritten Ungleichung folgt dann aber

$$5 \geq x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6,$$

was ein Widerspruch ist und somit kein Punkt existiert, der gleichzeitig allen Ungleichungen genügt.

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Sei X die Wartezeit, die ein zufälliger Kunde in der Schlange einer Bank steht. Der Erwartungswert von X betrage 10 Minuten, die Standardabweichung 5 Minuten.

i) Wir betrachten das arithmetische Mittel der Wartezeiten einer zufälligen Stichprobe aus 100 Kunden.
Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass dieses arithmetische Mittel größer als 11 Minuten ist.

ii) Wir nehmen nun an X sei normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 5$. Wie groß ist unter diesen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zwischen 8 und 12 Minuten wartet?

Lösung

i) Seien X_i, für $i = 1, \ldots, 100$, die Elemente der Stichprobe. All die X_i sind unabhängig und identisch verteilt (vgl. Bemerkung 19.4).
Da $n = 100$ groß ist, besagt der zentrale Grenzwertsatz, dass die Variable $\widetilde{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ als annähernd normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 10$ und Standardabweichung $\sigma = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0,5$ angenommen werden kann. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} P\left(\widetilde{X} > 11\right) &= 1 - P\left(\widetilde{X} \leq 11\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\widetilde{X} - 10}{5} \leq \frac{11 - 10}{0,5}\right) = 1 - \Phi(2) \\ &\approx 1 - 0,9773 = 0,0227. \end{aligned}$$

ii) Da X nun als normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 5$ angenommen wird, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{8 - 10}{5} \leq \frac{X - 10}{5} \leq \frac{12 - 10}{5}\right) \\ &= \Phi(0,4) - \Phi(-0,4) = 2 \cdot \Phi(0,4) - 1 \\ &\approx 2 \cdot 0,6554 - 1 = 0,3108. \end{aligned}$$

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung II

In einer Firma wird an einer gefährlichen Maschine eine Alarmanlage für Unfälle installiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Unfall gibt, ist $0,1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Unfall der Alarm auslöst, ist $0,97$. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Alarm fälschlicherweise ausgelöst wird $0,02$.

i) Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass der Alarm auslöst?

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es trotz Alarm keinen Unfall gegeben hat?

LÖSUNG

i) Bezeichnen wir mit A das Ereignis, dass der Alarm auslöst, mit B_1 das Ereignis, dass es einen Unfall gibt und mit B_2 das Ereignis, dass es keinen Unfall gibt. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, dass der Alarm auslöst wird aufgeteilt in die Möglichkeit von Unfall (B_1) oder kein Unfall (B_2). Diese zwei Ereignisse B_1 und B_2 sind disjunkt und überdecken den ganzen Ereignisraum. Somit ergibt der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Satz 18.14), dass

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2),$$

wobei $P(B_1) = 0,1$, $P(B_2) = 0,9$, $P(A|B_1) = 0,97$ und $P(A|B_2) = 0,02$. Folglich ist $P(A) = 0,97 \cdot 0,1 + 0,02 \cdot 0,9 = 0,115$.

ii) Wir suchen $P(B_2|A)$. Da wir keine direkte Information über die Wahrscheinlichkeit von A, unabhängig von B_1 und B_2 haben, aber trotzdem wissen, dass B_1 und B_2 disjunkt sind und den Ereignisraum überdecken, können wir den Satz von Bayes (siehe Satz 18.15) benutzen. Nach i) ist $P(A) = 0,115$ und somit

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,115} = 0,157.$$

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986