



Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik

23. Februar 2009, 14:00 - 16:00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
 Zugelassene Hilfsmittel: Keine!

Gesamtzahl Aufgaben: 12
 Gesamtpunktzahl: 72

Bearbeiter:

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Anzahl Doppelbögen: _____

Bitte beschriften Sie jeden Doppelbogen mit Ihrer Matrikelnummer und Ihrem Namen!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Aufgabe 1 (8 PUNKTE)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache akzeptiert.

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{das Wort } bab \text{ ist ein Präfix von } w\}$
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält höchstens zwei } a\}$

Aufgabe 2 (9 PUNKTE)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen regulären Ausdruck an.

- (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } 0 \text{ und endet auf } 1\}$
- (b) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer Zahl in } \mathbb{N}_0\}$
- (c) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält höchstens eine } 0\}$

Aufgabe 3 (8 PUNKTE)

- (a) Wie lautet das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen?
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 2\} \cup \{a, b\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 4 (4 PUNKTE)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

$\forall L$: Falls L^* eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L eine reguläre Sprache.

Aufgabe 5 (4 PUNKTE)

Sei $G = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S \rightarrow AB, A \rightarrow a, B \rightarrow AB \mid b\})$ eine kontextfreie Grammatik und sei $w = aab$. Zeigen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, dass $w \in L(G)$.

Aufgabe 6 (9 PUNKTE)

Sei $G = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, B, X, Y\}, S, R)$ eine kontextfreie Grammatik mit

$$\begin{aligned} R = \{ & S \rightarrow Ab \mid aB \\ & A \rightarrow aA \mid XY \\ & B \rightarrow bB \mid A \mid a \\ & X \rightarrow cX \mid \varepsilon \\ & Y \rightarrow Yd \mid \varepsilon \} \end{aligned}$$

- Geben Sie eine Ableitung für das Wort aba an.
- Ist die Grammatik mehrdeutig? Begründen Sie ihre Antwort.
- Transformieren Sie G in eine äquivalente Grammatik G' ohne ε -Produktionsregeln.

Aufgabe 7 (4 PUNKTE)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

Die Sprache $\{a^i b^j c^k d^\ell \mid i, j, k, \ell \geq 1, i = j \text{ und } k = \ell\}$ ist kontextfrei.

Aufgabe 8 (4 PUNKTE)

Wie lautet der Satz von Rice?

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche sind unentscheidbar? (jeweils ohne Beweis)

- $\{\langle M \rangle \mid \text{Turingmaschine } M \text{ führt bei Eingabe } a^{42} \text{ mindestens 1936 Schritte aus}\}$
- $\{\langle M \rangle \mid M \text{ ist eine Turingmaschine und } L(M) \text{ ist kontextfrei}\}$
- $\{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ und } G_2 \text{ sind allgemeine Grammatiken mit } L(G_1) = L(G_2)\}$

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)

Welche der folgenden Sprachen sind rekursiv aufzählbar, welche nicht? (jeweils ohne Beweis)

- $\mathcal{H} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{Turingmaschine } M \text{ hält bei Eingabe } w\}$
- $\overline{\mathcal{H}} = \{x \mid x \text{ ist von der Form } \langle M, w \rangle \text{ und die Turing-Maschine } M \text{ hält nicht bei Eingabe } w \text{ oder } x \text{ ist nicht von dieser Form}\}$
- $\text{PRIMES} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer Primzahl}\}$

Aufgabe 11 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache $\text{DOUBLE-SAT} = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, für die es mindestens zwei verschiedene erfüllende Belegungen der Variablen gibt}\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen hierbei alle Sprachen zu Hilfe nehmen, von denen wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 12 (4 PUNKTE)

Ist $\{w \in \{a, b, \dots, z\}^* \mid w \notin \{\text{helau, alaaaf, allezhopp}\}\}$ kontextfrei? Begründen Sie ihre Antwort.