Klausur

24. Juli 2002, 10:30 - 12:30 Uhr

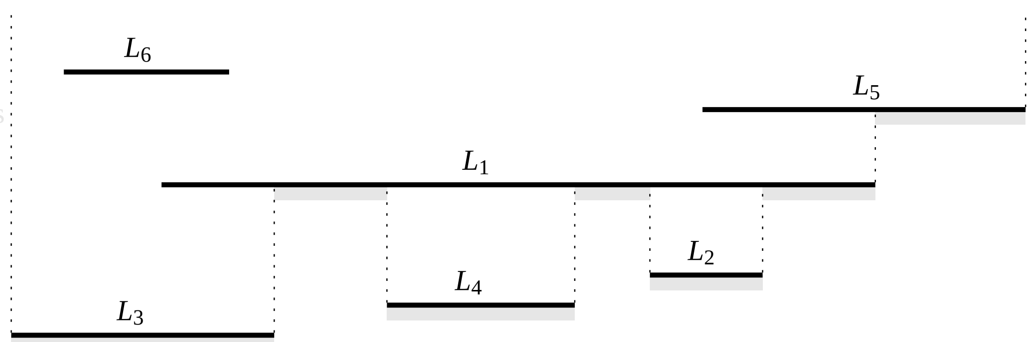
Name: . . . .

Matrikelnummer: . . . .

1. **Aufgabe** : 15 Punkte

Es sei $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ eine Menge von n horizontalen Strecken in der Ebene. Jede Strecke L_i, $1 \leq i \leq n$, sei durch ihre zwei Endpunkte (a_i, h_i) und (b_i, h_i), $a_i < b_i$, definiert. Wir nehmen an, dass alle Endpunkte verschiedene x-Koordinaten haben, und dass keine zwei Strecken die gleiche Höhe haben.

Die *untere Einhüllende* von $\mathcal{L}$ bestehe aus den Teilen der Strecken von $\mathcal{L}$, die vom Punkt $(0, -\infty)$ aus „sichtbar" sind. Diese untere Einhüllende sei durch eine sortierte (von links nach rechts) Folge $UL(\mathcal{L})$ von Streckennummern beschrieben. In dem Beispiel unten ist $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_6\}$ und $UL(\mathcal{L}) = (3, 1, 4, 1, 2, 1, 5)$.



Geben Sie einen Algorithmus an, der die Folge $UL(\mathcal{L})$ in $O(n \log n)$ Zeit berechnet. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist. Begründen Sie, warum die Laufzeit durch $O(n \log n)$ beschränkt ist.

2. **Aufgabe** : 17 Punkte

Seien R und B zwei Mengen von Punkten in der Ebene. Die Gesamtgröße dieser Mengen wird mit n bezeichnet, d.h. $n = |R| + |B|$. Wenn r ein Punkt von R, und b ein Punkt von B ist, dann nennen wir das Punktepaar (b, r) ein *SW-Paar*, falls b *süd-westlich* von r liegt, d.h. $b_x \leq r_x$ und $b_y \leq r_y$. Sei K die Gesamtanzahl solcher SW-Paare.

Geben Sie einen *Plane-Sweep* Algorithmus an, der alle SW-Paare in Zeit $O(n \log n + K)$ berechnet. Weisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus nach, und geben Sie an, welche Datenstrukturen benutzt werden. Beweisen Sie, dass die Laufzeit Ihres Algorithmus durch $O(n \log n + K)$ begrenzt ist.

3. **Aufgabe** : 12 Punkte

   (a) Seien A und B zwei Mengen. Definieren Sie den Begriff “A ist in Polynomzeit auf B reduzierbar” ($A \leq B$).

   (b) Geben Sie die formale Definition von **NP**-Vollständigkeit an. Erläutern Sie die Definition mit eigenen Worten.

   (c) Wie kann man von einer Menge beweisen, dass sie **NP**-vollständig ist, ohne die Definition zu benutzen? Erklären Sie informell, warum dies richtig ist.

4. **Aufgabe** : 15 Punkte

   Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1,2,\ldots,m\}$ und Kantenmenge E. Ein *Hamilton-Kreis* ist ein geschlossener Pfad, der jeden Knoten von G genau einmal besucht. Wir definieren die folgende Menge:

   $$HK := \{G: \ G \text{ ist ein Graph, der einen Hamilton-Kreis enthält}\}.$$

   Sei M eine ganzzahlige $m \times m$ Matrix. Wir bezeichnen mit G_M den vollständigen Graphen mit Knotenmenge $V = \{1,2,\ldots,m\}$. Jede Kante $\{i,j\}$ in diesem Graphen hat Kosten $M(i,j) = M(j,i)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$. Eine *Rundreise* ist ein geschlossener Pfad in dem Graphen G_M, der jeden Knoten genau einmal besucht. Die *Kosten* einer Rundereise sind die Summe der Kosten aller Kanten, die auf dieser Rundreise benutzt werden. Wir definieren die folgende Menge:

   $$TSP := \{(M,k): \text{ der Graph } G_M \text{ enthält eine Rundreise mit Kosten höchstens } k\}.$$

   Sei $G = (V,E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1,2,\ldots,m\}$ und Kantenmenge E. Wir definieren die $m \times m$ Matrix A durch

   $$A(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E, \\ 2 & \text{falls } \{i,j\} \notin E. \end{cases}$$

   Beweisen Sie, dass der Graph G einen Hamilton-Kreis enthält, genau dann wenn der Graph G_A eine Rundreise mit Kosten höchstens m enthält.

   Beweisen Sie, dass TSP in **NP** ist.

   Beweisen Sie, dass die Menge TSP **NP**-vollständig ist. Sie dürfen benutzen, dass die Menge HK **NP**-vollständig ist. (Falls Ihnen ein formaler Beweis zu kompliziert ist, begründen Sie die **NP**-Vollständigkeit zumindest informell.)

5. **Aufgabe** : 5 Punkte

   Gegeben sei folgende Rekursion(un)gleichung:

   $$T(n) \leq \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ n + 6 \cdot T(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $T(n) = O(n^3)$ gilt.