Klausur

17. Juli 2003, 10:30 - 12:30 Uhr

Name: . . . .

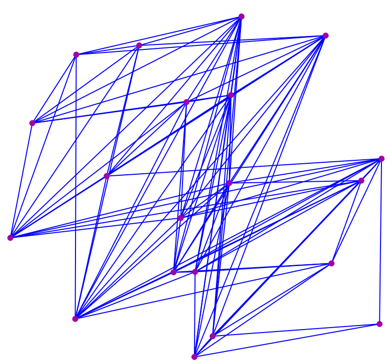
Matrikelnummer: . . . .

Anzahl beschriebener Blätter
(ohne Aufgabenblatt): . . . .

Bitte beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Name und Matrikelnummer!

Bearbeitungszeit:	120 Minuten	Gesamtzahl Aufgaben:	5
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!	Gesamtpunktzahl:	70

Aufgabe 1 (16 PUNKTE)
Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene. Sei $n = |P|$. Wir nennen ein Punktepaar $(p,q) \in P \times P$ ein *SW-Paar*, falls p *süd-westlich* von q liegt, d.h. falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Sei K die Gesamtanzahl solcher SW-Paare.



Geben Sie einen *Teile-und-Herrsche* Algorithmus an, der alle SW-Paare in Zeit $O(n \log n + K)$ berechnet. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. *Hinweis:* Betrachten Sie die Laufzeit für die Ausgabe der K Paare getrennt, d.h., betrachten Sie eine Rekursions(un)gleichung für die Kosten ohne die Kosten für die Erzeugung der K Paare und schätzen Sie die Kosten für die Erzeugung der Paare getrennt ab.
Sollte Ihnen kein Teile-und-Herrsche Algorithmus einfallen, geben Sie einen Plane-Sweep Algorithmus an (Sie können dann aber maximal 10 PUNKTE erreichen)!

Aufgabe 2 (15 PUNKTE)
Wir betrachten die Probleme $SP := \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) : m, a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ und $\exists\, I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}, \sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i\}$. und $BP := \{(s_1, s_2, \ldots, s_m, S, B) : m, s_1, s_2, \ldots, s_m, S, B \in \mathbb{N}$ und es gibt eine Zerlegung von $\{1, 2, \ldots, m\}$ in Klassen I_k, $1 \leq k \leq B$, so dass $\sum_{i \in I_k} s_i \leq S$ für alle k, $1 \leq k \leq B\}$.

1. Beweisen Sie, dass $SP \in \mathbf{NP}$.
2. Beweisen Sie, dass $SP \preceq_{\mathbf{P}} BP$.
3. Nehmen Sie an, Sie wüssten, dass SP **NP**-vollständig ist. Zeigen Sie unter dieser Annahme, dass BP ebenfalls **NP**-vollständig ist.

Aufgabe 3 (15 PUNKTE)

1. Geben Sie die formale Definition von **NP**-Vollständigkeit an.
2. Wie kann man von einer Menge beweisen, dass sie **NP**-vollständig ist, ohne die Definition zu benutzen? Erklären Sie informell, warum dies richtig ist.
3. Wir schreiben im Folgenden $A \preceq_{\mathbf{P}} B$ genau dann wenn sich A in Polynomialzeit auf B reduzieren lässt. Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

wahr	**falsch**	
○	○	A **NP**-vollständig und $A \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
○	○	$\mathbf{P} = \mathbf{NP} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{NP} \neq \mathbf{EXP}$.
○	○	$A \in \mathbf{P}$, $B \in \mathbf{NP}$ und $B \preceq_{\mathbf{P}} A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
○	○	$A \preceq_{\mathbf{P}} B$ und $B \preceq_{\mathbf{P}} C \quad \Rightarrow \quad A \preceq_{\mathbf{P}} C$.
○	○	Falls $A \preceq_{\mathbf{P}} B$ gilt und A **NP**-vollständig ist, so ist B ebenfalls **NP**-vollständig.
○	○	$A \subseteq \{0,1\}^* \quad \Rightarrow \quad$ es gibt eine Turingmaschine, die A entscheidet.

Aufgabe 4 (12 PUNKTE)
Geben Sie einen Plane-Sweep-Algorithmus an, der die konvexe Hülle einer Menge von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Begründen Sie, warum die Laufzeit durch $O(n \log n)$ beschränkt ist. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.☺

Aufgabe 5 (12 PUNKTE)

1. Beweisen Sie, dass $4n^2 + 7n \log_2 n - 72 = \Omega(n^2)$
2. Im Folgenden bezeichne log stets den Logarithmus zur Basis 2, d.h., $\log n = \log_2 n$. Zeichnen Sie einen Pfeil von $f(n)$ nach $g(n)$ genau dann, wenn $f(n) = O(g(n))$ gilt. Ein solcher Pfeil ist bereits eingezeichnet. Wie kann man an dem entstandenen Diagramm ablesen, ob $f(n) = \Theta(g(n))$ gilt?